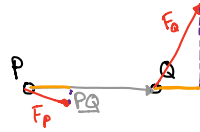


Formelsammlung Jean Mügert

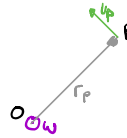
Kinematik: Bewegung von Körpern und Systeme

SdpG: $\underline{v}_P \cdot \underline{PQ} = \underline{v}_Q \cdot \underline{PQ} \mid \underline{O} \equiv \underline{PQ} (\underline{v}_P - \underline{v}_Q)$



Momentanzentrum: $\underline{v}_P = \underline{\omega} \times \underline{r}_P$ (Vektoriell) $\omega = \frac{v_P}{\|r_P\|} = \frac{v_P}{R}$ (Geometrisch)

wenn $\underline{v}_P = 0 \Rightarrow P$ ist Momentanzentrum



SuM: $\underline{v}_P = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{r}_{BP}$ (ABBA)

Eine starke Bewegung ist momentan:

- eine Translation, falls $\omega = 0$
- eine Rotation, falls $\omega \neq 0$ & $I_2 = 0$
- eine Schraubung falls $I_2 \neq 0$

Wobei die Invarianten sind:

$$I_1 = \underline{\omega} \quad I_2 = \underline{\omega} \cdot \underline{v}_P$$

Kinematik: $\{\underline{v}_B, \underline{\omega}\}$

Wie berechnet man die Komponenten einer Kraft, mit seine Richtung & seine Betrag?

$\underline{F} = \underline{e}_F \cdot F = \frac{\underline{F} \cdot \underline{P}}{\|\underline{F}\|} \underline{F}$

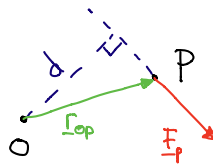
$\underline{F} \cdot \underline{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2$

$\|\underline{F}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Moment berechnung: $\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{F}$

$$M_O = \pm d F_{\perp} = |\underline{r}_{Op}| |\underline{F}_P| \sin \varphi$$

$$d = |\underline{BO} \times \underline{e}_{F_P}| = |\underline{BO} \times \frac{\underline{F}_P}{|F_P|}|$$



Leistung: $P = \underline{F}_P \cdot \underline{v}_P$ / für rotation: $P = M_O \cdot \omega$

$$P_{tot} = \sum_i P_i = \underline{R} \cdot \underline{v}_B + \underline{M}_B \cdot \underline{\omega}$$

Resultierende: $\underline{R} = \sum_i \underline{F}_i$

Res. Moment: $\underline{M}(O) = \sum_i \underline{r}_{Oi} \times \underline{F}_i \quad M_P = M_O + \underline{r}_{PO} \times \underline{R}$

Statisch Äquivalent wenn $P(\{F_i\}) = P(\{G_i\})$

Hauptsatz der Statik:

$$\underline{R} = \underline{0}, \underline{M} = \underline{0}$$

Eine Kräftegruppe ist statisch äquivalent zu

- Einem Nullsystem, falls $\underline{R} = \underline{0}$ & $\underline{M}_O = \underline{0}$
- Einem Moment (Kräftepaar), falls $\underline{R} = \underline{0}$ & $\underline{M}_O \neq \underline{0}$
- Einer Einzelkraft, falls $\underline{R} \neq \underline{0}$ & $I_2 = 0$
- Einer Schraube, falls $I_2 \neq 0$ ($\underline{R} \neq \underline{0}$ & $\underline{M} \neq \underline{0}$)

Wobei die Invarianten sind:

$$I_1 = \underline{R} \quad I_2 = \underline{R} \cdot \underline{M}_O$$

Dynamik $\{\underline{R}, \underline{M}_B\}$

Bindungskräfte bestimmen:

1. $\underline{R} = \underline{0}, \underline{M} = \underline{0}$. 3 oder 6 Gleichungen $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$
2. PdVL, unzulässigen Bewegungszustand

Stabkräfte:

PdVL:

1. zulässigen Bewegungszustand
2. unzulässigen Bewegungszustand (braucht aber Lagerkräfte)

klemmt?	beweglich?	kinematisch (unbestimmt)	statisch (unbestimmt)	(statisch bestimmt)
nein	nein	nein	nein $m > n$	Stat. best.
nein	ja	ja	nein $m > n$	nicht stat. best.
ja	nein	nein	ja $m < n$	nicht stat. best.
ja	ja	ja	ja $m < n$	nicht stat. best.

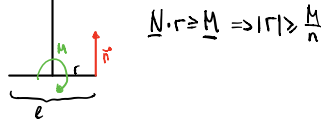
bewegt sich das System? kann man alle Kräfte berechnen? Ja → nicht stat. unbe.

Sei $m = \#$ lineare unabhängige Gleichungen und $n = \#$ Unbekannten

Kippen:

Normalkraft bestimmen und vergleichen mit:

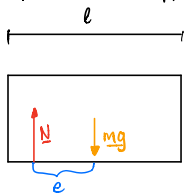
Ein Moment: (kippt falls $r > \frac{l}{2}$)



$$N \cdot r \geq M \Rightarrow |r| \geq \frac{M}{N}$$

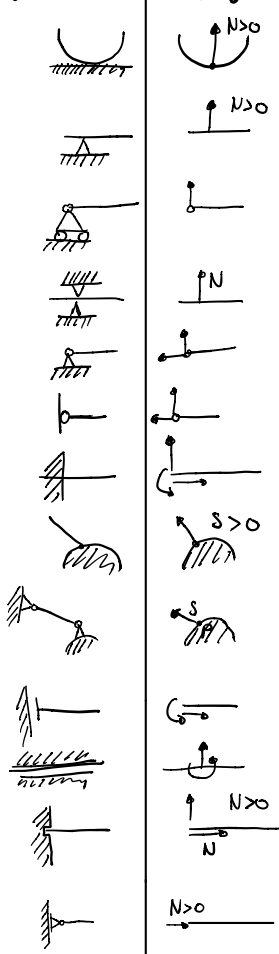
Andere Kräfte:

kippt nicht falls $M(0) = 0$ wenn Nam Rand ist.



- Also:
- Momentbedingung aufstellen mit e
 - nach e lösen
 - dann e mit l vergleichen
- $$e \leq \frac{l}{2}$$

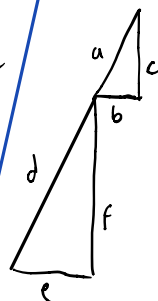
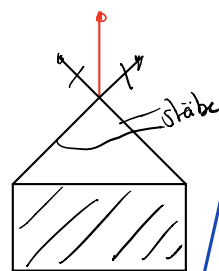
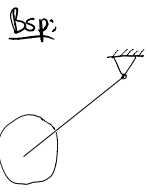
Bindungen & Zusatzbedingungen



Wie viele Koordinaten um alle Bewegungen zu beschreiben = Freiheitsgrad
Federn durch Stäbe ersetzen

φ	0	30	45	60	90
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

man kann nur den Stab durch ein pendel stütze ersetzen falls **keine** andere Kraft wirkt auf dem Stab. Wenn ja dann alle Lagerkräfte einführen.



$$\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$$

$$\frac{a}{f} = \frac{b}{c} \rightarrow e = \frac{fb}{c}$$

Freiheitsgrad einer system: ($\#$ linear unabhängige koordinaten)

1. Ein Element des system befestigen
 2. Falls das system kann sich nicht mehr bewegen, dann es ist Freiheitsgrad 1.
 3. Schritt operation wiederholen bis alles fest ist
- $\#$ befestigte Elemente = Freiheits grad
- oder $f = n - b$ wo $b = \#$ lineare unabhängigen Bindungsgleichungen
 $c = \sum f$ von einzelnen Körper

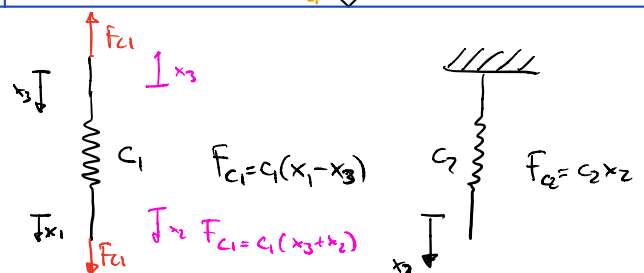
Δ beim Einführung des Normalkraft, ein abstand $\vec{e}$ von zentrum einführen.



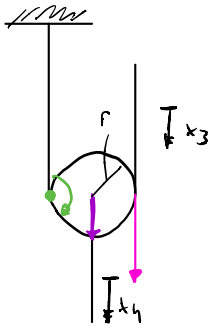
Federkraft:

$$F_e = c \cdot d$$

Feder als zugkraft einführen



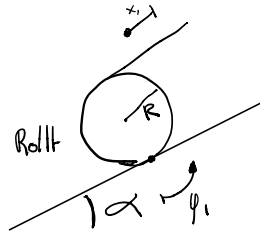
Kinematische Relationen



$$\omega = \frac{\dot{x}_4}{r} = \frac{\dot{x}_3}{2r} \Rightarrow 2\dot{x}_4 = \dot{x}_3$$

$$\Rightarrow x_3 = 2x_4 + c$$

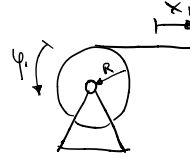
mit ungespannte Lage lösen, oft der c verschwindet.



$$\omega = \dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{x}_1}{2R}$$



$$\omega = \frac{\dot{x}_4}{r} = \frac{\dot{x}_3}{2r} = \dot{\varphi}$$



$$\omega = \dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{x}_1}{R}$$

Falls anfangsbedingung: von Ruhe losgelassen $\Rightarrow \varphi_1 = \frac{x_1}{R}$ usw.

Ansatz für Bewegung Diff. Gleichungen: $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{k}{\omega^2}$

wobei k ist die rechte

Seite. Und ω^2 der term vor dem x.

$\ddot{x} + \omega^2 x = k$
muss hier 1 stehen

ω = Eigenfrequenz, Kreisfrequenz

Differentialgleichung erstellen:

Massenmittelpunktsatz:

$$m\ddot{x} = \sum_i F_{xi} \quad \Delta \text{ nur Kräfte in x-Komponente}$$

Drallsatz: $L_o = I_o \omega = I_o \dot{\varphi} = M_o$

$$I \ddot{\varphi} = \sum_i M_i \quad \Delta \text{ negative und positive moment}$$

Reibung:

μ_0 : Haftreibungskoeffizient

Haftreibung: $|F| \leq \mu_0 \cdot |N|$
relativgeschwindigkeit $v_s = 0$

μ_1 : Gleitreibungskoeffizient

Gleitreibung: $|F| = \mu_1 |N|$
 $v_s \neq 0$

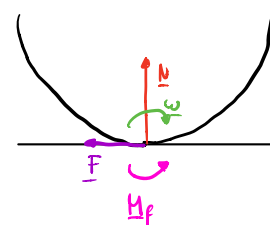
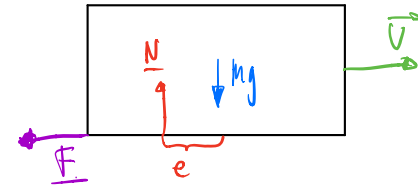
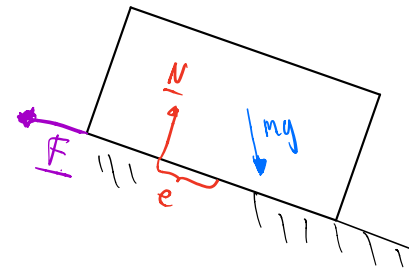
$$\underline{F} = -\mu_1 \cdot \underline{N} \cdot \frac{v_B}{|v_B|} \quad (\text{für Richtung})$$

μ_2 : Rollwiderstandslänge (in alle Fälle beim Runden objekt)

Rollt nicht $\omega = 0$ $|M| \leq \mu_2 |N|$

Rollt $\omega \neq 0$ $|M_F| = \mu_2 |N|$ (hat auch Haftreibung)

$$\underline{M}_F = -\mu_2 \underline{M} \cdot \frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|} \quad (\text{gegen Rollrichtung})$$

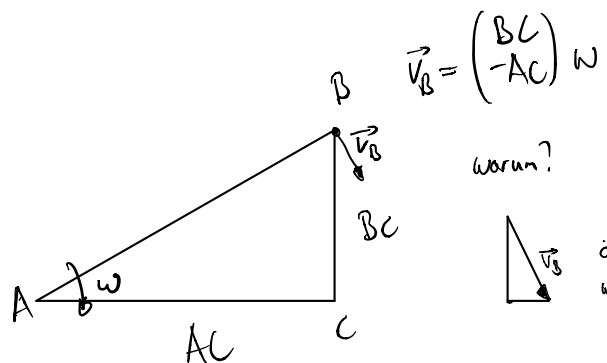


ohne Schlupf
= kein Rollwiderstands
moment

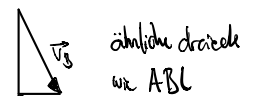
Massenträgheitsmoment

$$I_P = \int r^2 dm$$

	Massen Punkt	$I_P = mR^2$
	Kreisscheibe oder Zylinder	$I_P = \frac{1}{2} mR^2$
	Balken bzgl. Mittelpunkt	$I_P = \frac{1}{12} ml^2$
	Balken bzgl. Endpunkt	$I_P = \frac{1}{3} ml^2$
	Ring oder Rohr	$I_P = mR^2$
	Kugel voll	$I_P = \frac{2}{5} mR^2$
	Kugel leer	$I_P = \frac{2}{3} mR^2$



warum?



ähnliche Dreiecke
wie ABL

Glossaire

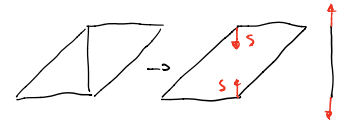
$\vec{v}$	Geschwindigkeit	$\frac{m}{s}$	$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
v	Schnelligkeit	$\frac{m}{s}$	$v = \vec{v} $
$\vec{a}$	Beschleunigung	$\frac{m}{s^2}$	$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$
$\vec{\omega}$	Winkel- Rotationsgeschwindigkeit	$\frac{rad}{s}$	$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}_p$
$\vec{M}_0$	Moment in 0	Nm	$\underline{M}_0 = \underline{r}_{or} \times \underline{F}$
P	Leistung	$\frac{Nm}{s} = W$	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_B + \vec{M}_B \cdot \vec{\omega}$
$\vec{R}$	Resultierende	N	$R = \sum F$
$\vec{S}$	Seilkraft	N	—
$\vec{N}$	Normalkraft	N	—
$\mu_{0,1,2}$	Reibungskoeffizienten 0: Haft, 1: Gleit, 2: Roll		ϕ
φ	Winkel	rad	$x = \varphi r, \dot{x} = \dot{\varphi} r = \omega r$
ρ	dichte	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{dm}{dV}$
$F^{(h)}$	Trägheitskraft	N	$dF^{(h)} = -\rho a dV = -a dm$
$\underline{a}_c$	Beschleunigung in Massenmittelpunkt		
p	Impuls	$\frac{kgm}{s}$	$\dot{p} = \underline{R}$
L_0	Drehmoment bez. 0	$\frac{kgmrad}{s}$	$L_0 = \iiint_B \underline{r} \times \underline{v} dm, \dot{L}_0 = I_0 \dot{\omega}$
I_0	Massenträgheitsmoment bez. 0	kgm^2	$I_0 = \iiint_B r^2 dm, \dot{L}_0 = I_0 \dot{\omega} = M_0$
F_c	Federkraft	N	$F_c = d\epsilon$
ω	Rotationsschnelligkeit	$\frac{rad}{s}$	$\omega = \frac{v_p}{r_p}$
F_c	Federkraft	N	$F_c \stackrel{z.B.}{=} c x = c R \varphi$

Vorgehen für Pdul

- Alle Kräfte einzeichnen
- Ein Winkelgeschwindigkeit einführen, zulässig ^(oder unzulässig falls Lagerkräfte bekannt) Bewegungszustand bestimmen
- Alle Geschwindigkeiten in Punkten wo es eine Kraft gibt berechnen
- Alle Kräfte als Vektoren notieren, ($\underline{S} = S \cdot \underline{e}_S$)
- $\sum_{i=0}^n P_i = 0$ lösen $P_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \vec{M}_1 \cdot \vec{\omega}_1 + \vec{M}_2 \cdot \vec{\omega}_2 + \dots + \vec{M}_i \cdot \vec{\omega}_i = 0$

Druck-/Zugstäbe

Stab entfernen zugkraft einführen:



Pdul Vorgehen durchführen, falls S :

positiv $\rightarrow$ Zugstab $S > 0$

negativ $\rightarrow$ Druckstab $S < 0$

Vorgehen für Gleichgewichtsbedingung

- Materielles System definieren, freigeschnittenes System zeichnen, statisch unbestimmtheit für ganze System bestimmen (ev. Gl. & Unbek. zählen)
Kinematisch
- Kräfte statt Lager & äußere Kräfte einzeichnen.
- Koordinatensystem wählen & zeichnen
- Gleichgewichtsbedingungen aufstellen ($KB_x, KB_y, MB(z, 0)$)
- Gleichgewichtsbedingung lösen ($\underline{R} = 0, \underline{M}(0) = 0$), falls nicht genug Informationen, einzelne SK freischneiden.
- Resultaten & Zusatzbedingungen diskutieren

Dynamikaufgabe

1. Modellbildung, materielles System abgrenzen (Aufgabe gut lesen und wichtige Punkte unterstreichen)
2. Einzelne SK freischneiden
3. In allgemeiner Lage alle Kräfte einführen
4. Freiheitsgrad ermitteln, Koordinatensystem einführen
5. Kinematische Relationen aufstellen (mit $\omega = \frac{\dot{x}}{r}$)
6. Bewegungsdifferentialgleichungen formulieren. für jeden Körper
7. Bindungskräfte bestimmen, Federkräfte bestimmen und in Bewegungsdiff. gl. einsetzen
8. Bewegungsdiff. gl. lösen, Anfangsbedingungen formulieren
9. Diskutieren: Gleichgewichtslage: $\ddot{x} = 0$

Um Bewegungsdiff. Gl. zu finden, es ist ein guter

Idee alle Diff. gl. zu addieren. $m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + \dots = S_1 + S_2 - m_1 g + m_2 g + \dots$

Bei jeder Aufgabe achten auf:

1. System gross zeichnen / Koordinatensystem
2. Farben nutzen
3. Sauber arbeiten
4. Jeder Schritte schreiben
5. Lösung unterstreichen
6. Koordinatensystem klar einzeichnen
7. Aufgabe gut lesen
8. Falls eine Beziehung gefragt ist, wahrscheinlich muss man es vorher nutzen.