

1 Schwingungen

1.1 Harmonische Schwingungen

Federkraft $F_x = -kx = \frac{\partial E_{pot}}{\partial x}$

Newton $F_{res,x} = ma_x = m\ddot{x} = -kx$

Lsg. Harmonischer Oszillator $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$
 $= A \sin(\omega t + \delta)$

$A = \sqrt{\tilde{A}^2 + \tilde{B}^2} = \tilde{A} \sin(\omega t) + \tilde{B} \cos(\omega t)$

Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \delta)$

Beschleunigung $a(t) = \ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \delta)$

Anfangsbedingungen $\tan \delta = -\frac{v_0}{x_0 \omega}$ und $A = \frac{x_0}{\cos \delta}$

Frequenz und Schwingungsdauer sind unabhängig von der Amplitude

Kreisbewegung $x(t) = R \cos(\omega t + \delta) \mid \omega = \frac{v}{R}$

Federpendel $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Fadenpendel $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

1.2 Energieerhaltung

$E_{mech} = E_{pot} + E_{kin} = \text{konst.}$

$E_{pot}(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{2} k x^2 = -\int F dx$

$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2M}$

$E_{mech} = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$

$\langle E_{pot} \rangle = \langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{2} E_{mech}$

1.3 Gedämpfte Schwingungen

Reibungskraft $\vec{F}_R = -b\vec{v}$

Newton $F_{res,x} = m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \Rightarrow$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

mit Lsg. $\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \omega_0^2} \mid \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

i) Überdämpfte Bewegung $\frac{b^2}{4m^2} > \omega_0^2 \mid \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$$

ii) Kritische Dämpfung $\frac{b^2}{4m^2} = \omega_0^2 \mid \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{b}{2m} \Rightarrow$

$$x(t) = A e^{-\frac{b}{2m} t} + B t e^{-\frac{b}{2m} t}$$

iii) Schwachgedämpfte Schwingung $\frac{b^2}{4m^2} < \omega_0^2 \mid \lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$x(t) = A e^{-\frac{b}{2m} t} \cos(\omega' t + \varphi) \mid \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Zerfallskonstante

$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{1}{\gamma}$$

Falls $\omega_0^2 \gg \frac{b^2}{4m^2} \Rightarrow \omega' \approx \omega_0$

Energie

$$E_{mech} = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 e^{-\frac{b}{m} t}$$

Gütefaktor

$$Q = \omega_0 \frac{m}{b} = \omega_0 \tau$$

Energieverlust während einer Periode falls der Energieverlust über eine Schwingungsdauer nur einen kleinen Teil der Gesamtenergie beträgt:

$$\left(\frac{\Delta E_{mech}}{E_{mech}} \right)_{\text{Periode}} = \frac{2\pi b}{\omega_0 m} = \frac{2\pi}{Q}$$

1.4 Erzwungene Schwingungen

Äussere Kraft mit harm Zeitabhängigkeit $F_a = F_0 \cos \Omega t$

DGL $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t \mid \gamma = \frac{b}{m}$

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$A = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}}$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{-\gamma \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right)$$

Fall $\Omega \ll \omega_0$ $A \approx \frac{F}{m} \frac{1}{\omega_0^2} \mid \varphi = 0$

Fall $\Omega \gg \omega_0$ $A \approx \frac{F}{m} \frac{1}{\Omega^2} \mid \varphi = \pi$

Fall $\Omega = \omega_0$ $A \approx \frac{F}{m} \frac{Q}{\omega_0^2} = \frac{F}{K} Q \mid \varphi = -\frac{\pi}{2} \mid Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$

Resonanz

2 Wellen

2.1 Grundsätzliches

Eine Welle ist eine sich räumlich ausbreitende Störung oder Schwingung von physikalischen Grössen.

Wellen transportieren Energie ohne Transport von Masse. Idealerweise breiten sich Wellen mit einer konstanten Geschwindigkeit v aus.

- Mechanische Wellen sind Störungen in einem Medium $\rightarrow$ an das Medium gebunden
- Wellen, die sich im Vakuum ausbreiten können. Immer Transversal mit Lichtgeschwindigkeit. z.B. Elektromagnetische Wellen, Gravitationswellen
- Transversale Wellen: Störung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung
- Longitudinal Wellen: Störung in Ausbreitungsrichtung.

2.2 Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

Lösungsraum $y(x, t) = f(x \mp vt)$

Seilwelle / Transversalwelle $v = \sqrt{\frac{F_s}{\mu}}$

Elastische Welle / Longitudinalwelle $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

E : Elastizität (Young's mod.) $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ — σ : Spannung $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

Dehnung $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

Hook'sches Gesetz $\sigma = \epsilon E = \frac{F}{A}$

2.3 Periodische und harmonische Wellen

Alle periodische Wellen können durch Überlagerung von harmonischen Wellen erzeugt werden. (Fourier)

$$y(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t)$$

—: fortschreitend | +: rückläufig

x fix: Jeder Punkt im Medium führt eine harmonische Schwingung aus: $y(x_0, t) = y_{x_0}(t) = A \sin(\omega t \pm kx_0)$

t fix: Für eine bestimmte Zeit t_0 ist die Lösung periodisch im Raum: $y(x, t_0) = y_{t_0}(x) = A \sin(kx \pm \omega t_0)$

Die Periodizität im Raum ist die Wellenlänge λ

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \mid \omega = \frac{2\pi}{T} \mid v = \lambda \nu$$

2.4 Energietransport und Intensität

Gesamtenergiedichte $U_{kin} + U_{pot} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$

Intensität elastische Welle $\langle I \rangle = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2 = \frac{\langle P \rangle}{S}$

Intensität Seil- /Seitenwelle $\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2$

Intensität einer Punktquelle $I = \frac{\langle P \rangle}{4\pi r^2}$

Decibel Intensität $I = 10 \text{ dB} \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \mid I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

Dezibelrechnung $I_{2, \text{dB}} - I_{1, \text{dB}} = 20 \text{ dB} \log \frac{d_2}{d_1}$

2.5 Wellenausbreitung an Hindernissen

Reflexionskoeffizient $r = \frac{A_r}{A_i}$

Transmissionskoeffizient $t = \frac{A_t}{A_i}$

Einfallende Welle $y_i = A_i e^{i(k_1 x - \omega t)}$

Reflektierte Welle $y_r = A_r e^{-i(k_1 x - \omega t)}$

Transmitierte Welle $y_t = A_t e^{i(k_2 x - \omega t)}$

Mit $\begin{cases} k_1 = \frac{\omega}{v_1} & \text{Wellenzahl Medium } i \\ k_2 = \frac{\omega}{v_2} & \text{Wellenzahl Medium } t \end{cases}$

- Kontinuität der Auslenkung am Grenzpunkt $x = 0$

$$Ae^{-i\omega t} + rAe^{-i\omega t} = tAe^{-i\omega t} \Rightarrow t = 1 + r$$

- Energieerhaltung: einfall. Leistung = refl. + trans.

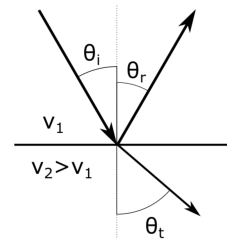
$$\Rightarrow 1 = r^2 + t^2 \frac{v_1}{v_2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}, \quad t = \frac{2v_2}{v_2 + v_1}$$

2.5.1 2D und 3D Problem

Prinzip von Fermat:

"Eine Welle läuft zwischen zwei Punkten im Raum sodass sie dazu möglichst wenig Zeit braucht"



$$- v_2 \geq v_1: \theta_t > \theta_i$$

$$- v_2 \leq v_1: \theta_t < \theta_i$$

$$- v_2 = v_1: \theta_t = \theta_i$$

Reflektierte Winkel

$$\theta_r = \theta_i$$

Transmittierter Winkel

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2}$$

Totale Reflexion wenn $v_2 > v_1$: $\theta_i \geq \theta_{i, \text{krit}} = \arcsin \left(\frac{v_1}{v_2} \right)$

Huygens-Fresnel Prinzip:

"Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt einer neuen kugelförmigen Elementarwelle"

Beugung:

Falls das Hindernis in Grössenordnung der Wellenlänge ist, dann ausbreitet sich die Welle wie ein Punktquelle. Falls das Hindernis deutlich grösser als die Wellenlänge ist, kann weiterhin das Strahlenmodell benutzt werden.

2.6 Dopplereffekt

• $v_B = 0, |v_Q| > 0$: $\nu_B = \begin{cases} \frac{\nu_Q}{1 - \frac{v_Q}{v_s}} & \text{Annäherung} \\ \frac{\nu_Q}{1 + \frac{v_Q}{v_s}} & \text{Entfernung} \end{cases}$

Hier ändert sich die von Beobachter wahrgenommene Wellenlänge

• $|v_B| > 0, v_Q = 0$: $\nu_B = \begin{cases} \nu_Q \left(1 + \frac{v_B}{v_s} \right) & \text{Annäherung} \\ \nu_Q \left(1 - \frac{v_B}{v_s} \right) & \text{Entfernung} \end{cases}$

Hier ändert sich die Geschwindigkeit der Welle aus Sicht der beobachter.

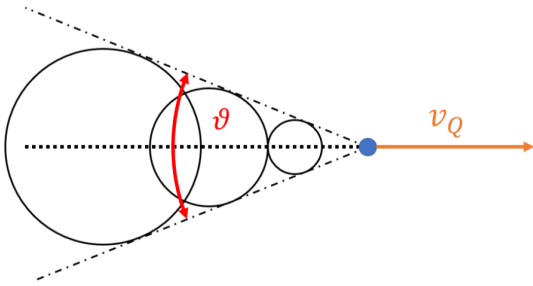
Quelle: Welle mit Frequenz ν_Q , und geschwindigkeit v_Q
Beobachter: Frequenz ν_B , und geschwindigkeit v_B aus Sicht des Beobachters

v_s ist die schallgeschwindigkeit (Ausbreitungsgeschwindigkeit)

Schallgeschwindigkeit Luft $c_{\text{Luft}} = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Überschallnkall: Falls $v_Q > v_s$ dann addieren sich die Einzelnen Wellenzüge auf einer Kegeloberfläche.

$$\vartheta = 2 \arcsin\left(\frac{v}{v_Q}\right)$$



4 Fourierreihen

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} x\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} x\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(x) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(x) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} x\right) dx$$

3 Überlagerung, stehende Wellen

3.1 Überlagerung

Überlagerung von zwei Wellen mit Phasenunterschied δ

$$y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\frac{1}{2}\delta\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\delta\right) = \tilde{A} \sin(x, t)$$

Konstruktive Interferenz ($\cos = \pm 1$) $\delta = n \cdot 2\pi \rightarrow \tilde{A} = 2A$

Destruktive Interferenz ($\cos = 0$) $\delta = (2n + 1)\pi \rightarrow \tilde{A} = 0$

Phasenunterschied (in rad) $\delta = k\Delta x$ or $\delta = \omega\Delta t$

3.2 Schwebung

Frequenz der Überlagerungsschwingung $f_r = \frac{f_1 + f_2}{2}$

Frequenz der Einhüllende cosinus $f_s = \frac{\Delta f}{2} = \frac{f_1 - f_2}{2}$

Schwebungsfrequenz was man hört $f_{beat} = 2f_s = \Delta f$

Unser Ohr nimmt nur die Intensität ($|\cos(\frac{\Delta f}{2})|$) wahr. Daher hören wir die Schwebungsfrequenz f_{beat} , selbst wenn die Amplitude ($\cos(\frac{\Delta f}{2})$) mit $\frac{f_{beat}}{2}$ schwingt.

3.3 Stehende Wellen

Beidseitig- eingespannt / offen / geschlossen

Wellenlänge $\lambda_n = \frac{2l}{n}$

Resonanzfrequenz $f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n$

Einseitig- eingespannt / offen und geschlossen

Wellenlänge $\lambda_n = \frac{4l}{2n-1}$

Resonanzfrequenz $f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{4l} (2n-1)$

Gleichung $y_n(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$

n	zwei fixe Enden	λ_n	f_n	ein loses Ende	λ_n	f_n
1		$\frac{2l}{1}$	$1 \cdot \frac{v}{2l}$		$\frac{4l}{1}$	$1 \cdot \frac{v}{4l}$
2		$\frac{2l}{2}$	$2 \cdot \frac{v}{2l}$		$\frac{4l}{3}$	$3 \cdot \frac{v}{4l}$
3		$\frac{2l}{3}$	$3 \cdot \frac{v}{2l}$		$\frac{4l}{5}$	$5 \cdot \frac{v}{4l}$

5 Temperatur und kin. Gastheorie

0. Hauptsatz Befinden sich zwei Körper im thermischen Gleichgewicht mit einem dritten, so stehen sie auch untereinander im thermischen Gleichgewicht.

Zustandsgleichung Idealer Gas

$$pV = \tilde{n}RT \mid pV = Nk_B T$$

ideales Gas

- Frei bewegliche Teilchen
- Massenpunkte ohne Eigenvolumen
- Keine Wechselwirkung
- Stöße gegen Wände elastisch

Gay-Lussac (konst. p)

$$V = C_p T$$

Boyle-Mariotte (konst. V)

$$p = C_V T$$

Kinetische Gastheorie

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2} k_B T = \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle$$

$$pV = nm \langle v_x^2 \rangle$$

Celsius - Kelvin

$$T = (T_{\text{Celsius}} + 273.15) \text{K}$$

Boltzmann Faktor: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand besetzt ist, ist proportional zu

$$p_i = p_0 e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

mit der Energie E_i des Zustands und p_0 sodass $\sum_i p_i = 1$.

6 Wärme und der 1. Hauptsatz der Thermodyn.

Die *Innere Energie* [U] ist eine Zustandsgrösse und die Summe der Energien (potentiell und kinetisch) der einzelnen Teilchen. Bei ideale Gas $E_{pot} = 0$ und Änderung der innere Energie ist Weg unabhängig

Wärme [Q] ist die Energie, die in Folge einer Temperaturdifferenz von einem Gegenstand auf einen anderen übergeht

spezifische Wärmekap.

$$Q = \begin{cases} mc\Delta T \\ \tilde{n}C\Delta T \end{cases}$$

spez. Schmelzwärme [kJ/K]

$$Q_{\text{Latent}} = m\lambda_S$$

spez. Verdampfungswärme [kJ/K]

$$Q_{\text{Latent}} = m\lambda_D$$

Arbeit [W]

$$dW \swarrow = -p dV$$

1. Hauptsatz

$$\Delta U = Q \swarrow + W \swarrow \text{ or } dU = dQ + dW$$

Innere Energie

$$U = \frac{f}{2} \tilde{n}RT = \tilde{n}C_V T = \frac{f}{2} pV$$

Wärmekap. bei konst. Volumen

$$C_V = \frac{f}{2} R$$

Wärmekap. bei konst. Druck

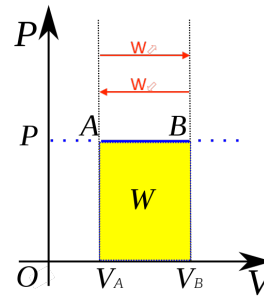
$$C_P = (\frac{f}{2} + 1)R = C_V + R$$

Adiabaten Konstante

$$\kappa = \frac{C_P}{C_V} = 1 + \frac{2}{f}$$

6.1 PV-Diagramme

6.1.1 Isobarer Prozess



p konstant

$$W = -p\Delta V = -\tilde{n}R\Delta T$$

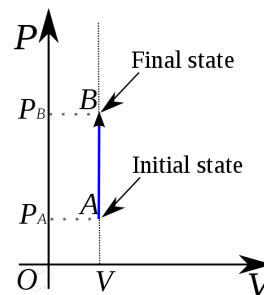
$$Q = (\frac{f}{2} + 1)\tilde{n}R\Delta T$$

$$= (\frac{f}{2} + 1)p\Delta V = \tilde{n}C_p\Delta T$$

$$\Delta U = \frac{f}{2}\tilde{n}R\Delta T$$

$$dS_{Gas} = \tilde{n}C_p \frac{dT}{T}$$

6.1.2 Isochorer Prozess



V konstant

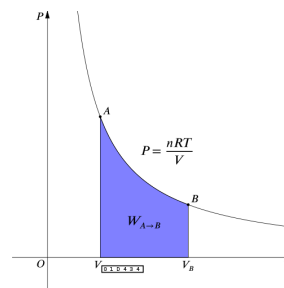
$$W = 0$$

$$\Delta U = dQ = \frac{f}{2}\tilde{n}R\Delta T$$

$$= \frac{f}{2}V\Delta p = \tilde{n}C_V\Delta T$$

$$dS_{Gas} = \tilde{n}C_V \frac{dT}{T}$$

6.1.3 Isothermer Prozess



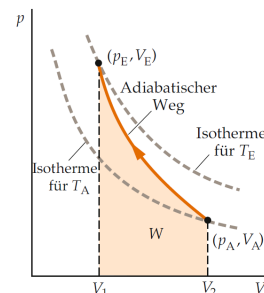
T konstant $\rightarrow PV$ konstant

$$\Delta U = 0 = W + Q$$

$$W = \tilde{n}RT \ln \frac{V_A}{V_E} = pV \ln \frac{V_A}{V_E}$$

$$\Delta S_{Gas} = \tilde{n}R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

6.1.4 Adiabatischer Prozess



$$TV^{\kappa-1} \mid pV^{\kappa} \mid \frac{T^{\kappa}}{p^{\kappa-1}} \text{ konst.}$$

$$dQ = 0 \rightarrow \Delta S = 0$$

$$\Delta U = dW = \frac{f}{2}\tilde{n}R\Delta T$$

$$= \frac{p_E V_E - p_A V_A}{\kappa - 1}$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{C_P - C_V}{C_V} \frac{dV}{V}$$

6.1.5 freie Expansion

$$\Delta U = Q \swarrow = W \swarrow = 0 \Rightarrow T_1 = T_2, p_1 V_1 = p_2 V_2$$

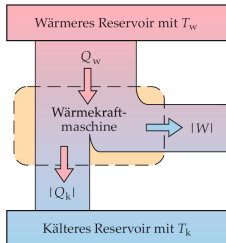
$$\Delta S_{Gas} = -\frac{\Delta W}{T} = \frac{1}{T} \int_{V_1}^{V_2} \frac{\tilde{n}RT}{V} dV = \tilde{n}R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \text{ (Durch "simulation" isoth. Prozess)}$$

7 2. Hauptsatz der Thermodyn.

- Umwandlung E_{mech} in Q ist vollständig möglich
- Komplette Umwandlung von Q in E_{mech} ist unmöglich
- Wärme fließt spontan von wärmeren ins kältere Reservoir (Wärmeleitung irreversibel)

Kreisprozess: das Gas kehrt in den original Zustand zurück

$$\Rightarrow \Delta U = Q + W = 0$$



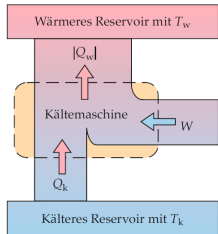
Wärmekraftmaschine

Wärme $\rightarrow$ Arbeit

Uhrzeigersinn in p-V Diagramm

$$|W| = Q_w - Q_k$$

$$\varepsilon = \frac{\text{output}}{\text{input}} = \frac{|W|}{Q_w} = \frac{Q_w - |Q_k|}{Q_w} = 1 - \frac{|Q_k|}{Q_w}$$



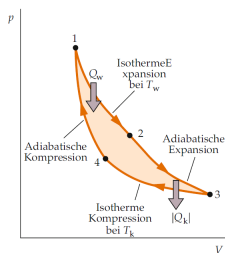
Kältemaschine (= Wärmepumpe)

Arbeit $\rightarrow \{Q_{\text{Kalt.res.}} \rightarrow Q_{\text{Warm.res.}}\}$

Gegenuhr in p-V Diagramm

$$W_{\swarrow} = Q_w - Q_k$$

$$\varepsilon = \frac{Q_k}{W_{\swarrow}} = \frac{Q_K}{Q_w - Q_k}$$



Carnot Kreisprozess (WM)

Höchster Wirkungsgrad WM:

$$\varepsilon_{\text{real}} \leq \varepsilon_{\text{carnot}} = 1 - \frac{T_k}{T_w}$$

$$\Delta S_{\text{uni}} = \delta S_{\text{Gas}} + \Delta S_{\text{Um}} = 0$$

7.1 Entropie

Entropie, ein Mass für Unordnung

$$\Delta S \geq 0$$

Reversible Prozesse: Zustandsänderung die jederzeit wieder umgekehrt ablaufen könnte und wieder exakt zum Anfangszustand (Systeme, Reservoirs) führen könnte

- keine mechanische Energie aufgrund Reibung in Wärme umgesetzt
- Wärmeleitung darf nur zwischen Gegenständen mit gleichem T auftreten
- Quasi-statisch: Das System findet sich auf jedem Zeitpunkt im GGW.

Für eine abgeschloss. System bleibt die gesamte Entropie:

$$\Delta S_{\text{uni}} = \Delta S_{\text{sys}} + \Delta S_{\text{um}} = 0 \Rightarrow \Delta S_{\text{uni}} \begin{cases} > 0 & \text{irreversible} \\ = 0 & \text{reversible} \end{cases}$$

Für ein Kreisprozess ist $\Delta S_{\text{Gas}} = 0$ Entropieänderung (rev. Prozess)

$$dS_{\text{sys}} := \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = -dS_{\text{um}}$$

Die Entropie ist ein Zustandsgrösse $\Rightarrow$ Weg-unabhängig! Damit können wir dS für *nicht reversible* Prozess indem man den gleichen Weg mit ein rev. Prozess durchläuft.

Entropieänderung (Reservoir): T ist konst.

$$\Rightarrow \Delta S_{\text{Res}} = \frac{\Delta Q}{T_{\text{Res}}} \begin{cases} > 0 & \text{Res. nimmt Wärme} \\ < 0 & \text{Res. gibt Wärme ab} \end{cases}$$

statistische Definition: $S = -k_B \sum_{i=1}^{\Omega_N} p_i \ln p_i \approx k_B \ln \Omega_N$

Ω_N : Zahl der mikroskop. Zustände, die dem Makrozustand entspricht $\gg 10^{23}$

p_i : Wahrscheinlichkeit, dass das System sich im mikroskop. Zustand i findet.

T-S Diagramm: S auf y-Achse. T auf x-Achse.

Damit ein Prozess reversibel wird muss $\varepsilon_{\text{Prozess}} = \varepsilon_{\text{carnot}}$

Schritt:	A: (1 $\rightarrow$ 2)	B: (2 $\rightarrow$ 3)	C: (3 $\rightarrow$ 4)	D: (4 $\rightarrow$ 1)
Prozess:	isotherme Expansion	adiabatische Expansion	isotherme Kompression	adiabatische Kompression
Volumen	$V_1 \rightarrow V_2$	$V_2 \rightarrow V_3$	$V_3 \rightarrow V_4$	$V_4 \rightarrow V_1$
Temperatur	T_w	$T_w \rightarrow T_k$	T_k	$T_k \rightarrow T_w$
Arbeitsleistung $\nearrow$ Gas $\nwarrow$ Umgebung $\swarrow$ Umgebung $\searrow$ Gas	$\delta W_1' = \nu R T_w \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\delta W_2' = \nu C_V (T_w - T_k)$	$\delta W_3' = \nu R T_k \ln \frac{V_3}{V_4}$	$\delta W_4' = \nu C_V (T_w - T_k)$
Wärmezufuhr	$\delta Q_1' = \nu R T_w \ln \frac{V_2}{V_1}$	$C_V = R f/2$ $U = N f/2 k_B T$ 0	$\delta Q_2' = \nu R T_k \ln \frac{V_3}{V_4}$	0

8 Thermische Vorgänge

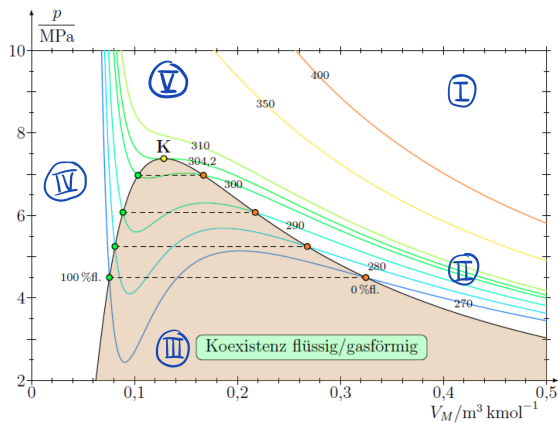
van der Waals Gleichung $\left(P + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT$

b : das Volumen eines Mols des Gases

a : attraktive Wechselwirkung

Kritische Punkt (K): Oberhalb der kritische Temperatur kann ein Gas nicht mehr verflüssigt werden.

$$V_{\text{krit}} = 3b\tilde{n} \mid T_{\text{krit}} = \frac{8}{27} \frac{a}{bR} \mid p_{\text{krit}} = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2}$$



I. $T \gg T_k \rightarrow$ nicht mehr mit v.d.W, Ideales Gas

II. Gasförmig

III. In dem Bereich wird $p(V)$ durch eine Konstante angenähert

IV. Flüssig, nahezu inkompressibel

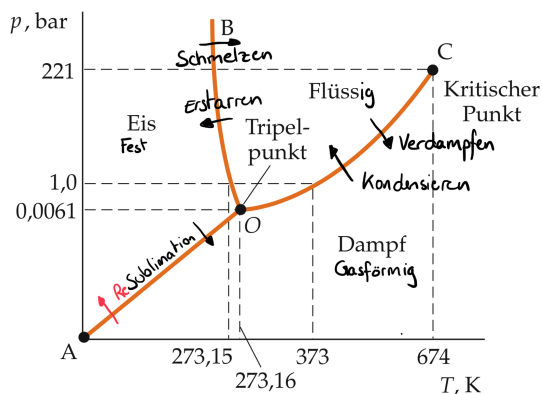
V. Gas kann nicht mehr verflüssigt werden

Sättigungsdampfdruck $p_d(T)$: Druck wenn Gas in III. Phase ist.

Siedetemperatur T_S : Temperatur wo $p_d = p_{\text{außen}}$
 $p_d = 1 \text{ bar}$ bei 100°C ($= T_S$) für Wasser unter ein Druck von 1 bar.

8.1 Phasendiagramm

y-Achse: p ; x-Achse: T ; V ist konst.



Phasendiagramm für Wasser

Wasser weist ein besonderes Phasendiagramm auf, da die Schmelztemperatur mit steigendem Druck abnimmt.
 (normalerweise nimmt zu)

O: Trippelpunkt, alle 3 Phasen im GGW

C: Ab der Krit. Pkt. sind fest und gasförmig nicht mehr zu unterscheiden.

Joules-Thompson Effekt:

Linde- Verfahren:

Inversionstemperatur T_I : $dT(T_I) = 0 \Rightarrow T = \frac{2a}{bR}$

9 Allgemeine Formeln

Mittelwert $\langle \dots \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \dots dt$

Auftriebskraft $F_A = \rho_{Luft} V_k g$

Druck $p = \rho g h$

Arbeit [J] oder $\left[\frac{kgm^2}{s^2}\right]$ $W = \int F dx$

kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$

Leistung [W] oder $\left[\frac{kgm^2}{s^3}\right]$ $P = \frac{\partial E}{\partial t} \approx \frac{W}{t} = F v$

$$\sin(\varphi_1) + \sin(\varphi_2) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

$$\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

$$\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \pm \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2)$$

$$\cos(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \mp \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2)$$

Klein Winkel Näherung: $\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \alpha$

Für adiabatische konstante: $x^\kappa = y \Leftrightarrow \kappa = \frac{\ln(y)}{\ln(x)}$

$\ln(2) \approx 69/100$

1 liter 10^{-3} m^3

1 bar 10^5 Pa

9.1 Molare Berechnungen

Anzahl Teilchen N

Anzahl Mols $[\tilde{n}] \text{ mol}$

1 mol enthält N_A Teilchen $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

$\tilde{n}$ Mol enthalten $N = N_A \cdot \tilde{n}$ Teilchen

Molare Masse $[M] \frac{kg}{mol}$

$$m = \frac{N}{N_A} M \mid m = \tilde{n} M$$

$$\begin{aligned} c_{Wasser} &= 4.182 \frac{kJ}{kgK} \\ c_{Eis} &= 2,06 \frac{kJ}{kgK} \\ \lambda_{Eis} &= 333 \frac{kJ}{kg} \\ \lambda_{Verdampf.} &= 2.26 \frac{MJ}{kg} \end{aligned}$$

System	Freiheitsgrade			C_V	C_p	κ
	Transl.	Rot.	Total			
1-atomiges Gas	3	0	3	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	$\frac{5}{3}$
2-atomiges Gas	3	2	5	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	$\frac{7}{5}$
3-atomiges Gas	3	3	6	$3R$	$4R$	$\frac{4}{3}$
feste Körper	3 kin.+ 3 pot.		6	$3R$	$3R$	-

Substanz	a $\text{Pa} \cdot \text{m}^6 \text{ kmol}^{-2}$	$10^3 \cdot b$ $\text{m}^3 \text{ kmol}^{-1}$	$10^3 \cdot V_M^K$ $\text{m}^3 \text{ kmol}^{-1}$	T^K K	p^K kPa
He	3 450	24,8	73,8	5,3	222
N ₂	140 800	39,8	119,4	126,1	3 290
CO ₂	365 600	44,2	132,6	304,2	7 160

9.2 Sonstiges

Am system zugeführte Energie $\swarrow$

Am Umgebung zugeführte Energie $\nearrow$

Zustandsgrößen

Austauschgrößen

U, T, p, V, S

Q, W

10 Konstanten und Buchstaben

10.1 Schwingungen und Wellen

F	Kraft	ma	$N = \frac{kgm}{s^2}$
F_s	Seilkraft	$v^2 \mu$	N
ρ	Massendichte	$\frac{m}{V}$	$\frac{kg}{m^3}$
μ	Linear Density	$\frac{m}{L}$	$\frac{kg}{m}$
p	Impuls	mv	$\frac{m^2}{s}$
ν	Frequenz	$\frac{1}{T}$	Hz
k	Wellenzahl	$\frac{2\pi}{\lambda}$	m^{-1}
λ	Wellenlänge	$\frac{v}{\nu}$	m
ω	Kreisfrequenz	$2\pi\nu$	Hz
k	Federkonstante	-	$\frac{kg}{s^2}$
E	Elastischemodul	-	Pa
S	Querschnittfläche	-	m^2
n	Ordnung	-	-

10.2 Temperatur und Kin. Gastheorie

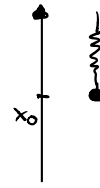
p	Druck	$\frac{F}{A}$	Pa
f	Freiheitsgrad	-	-
k_B	Boltzman Konstante	$1,38 \cdot 10^{-23}$	$\frac{J}{K}$
N_A	Avogadro Zahl	$6.022 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
R	Gas Konstante (= $N_A k_B$)	8.314	$\frac{J}{\text{mol} \cdot K}$
c	Spezifische Wärmekapazität	-	$\frac{J}{kg \cdot K}$
$\tilde{C}$	Spez. Molare Wärmekapazität	$\frac{mc}{\tilde{n}}$	$\frac{J}{\text{mol} \cdot K}$
λ_S	Spez. Schmelzwärmekap.	-	$\frac{J}{kg}$
λ_D	Spez. Vedrampfungswärmekap.	-	$\frac{J}{kg}$
S	Entropie	$\frac{Q_{rev}}{T}$	$\frac{J}{K}$

Kreisfrequenz bestimmen:

1. Gleichgewichtslage finden (x_0)
2. Rückstellkraft in funktion der Auslenkung bezüglich x_0 bestimmen

$$F_{\text{rück.}}(x_0 + x) \quad (\text{evtl. } x_0 = 0 \text{ setzen})$$

$$3. m a = F_{\text{rück.}}(x_0 + x) \Leftrightarrow a = \ddot{x} = \frac{F_{\text{rück.}}(x_0 + x)}{m}$$



4. mit Ansatz des Harmonische Oszillators lösen ($x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$)

Dsp: Federpendel: $x_0 = 0$

$$F_{\text{rück.}} = -kx = ma \Rightarrow a = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

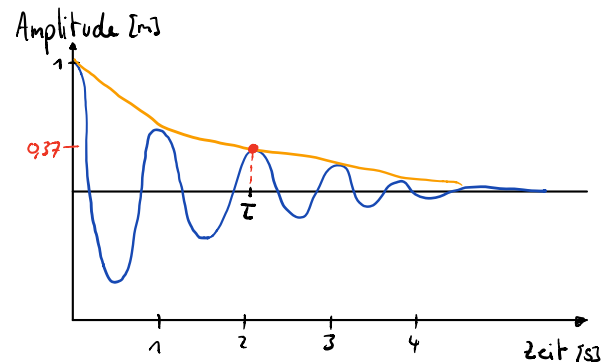
$$\text{Ansatz: } x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \Rightarrow -\omega^2(A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) - \frac{k}{m}(A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Zerfallskonstante bestimmen: (Gedämpfter Oszillator)

Lösung der Schwachgedämpfte Oszillator:

$$x(t) = \underbrace{A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Dämpfung}} \underbrace{\cos(\omega' t + \delta)}_{\text{Schwingungsterm}}$$



$$\Rightarrow t = \tau \text{ setzen} \Rightarrow \text{Amplitude} = A_0 \cdot e^{-1} = \frac{A_0}{e} \approx A_0 \cdot 0,37$$

$$\Rightarrow \text{auf dem Graph schauen wann Amplitude} = A_0 \cdot 0,37 \quad \bullet$$

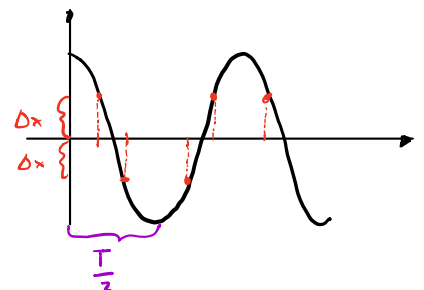
$$\Rightarrow \tau \approx 2,1 \text{ s}$$

Elektrisches Schwingungskreis:

$$q(t) = \frac{d i(t)}{dt} \quad u_L(t) = L \frac{d i(t)}{dt} \quad i_C = C \frac{d u_C(t)}{dt} \quad Q = CU$$

Welche t für ein bestimmte Δx_0 ?

$$\pm x_0 = A \cos(\omega t) \Rightarrow \cos(\omega t) = \frac{\pm x_0}{A} \Rightarrow t = \frac{1}{\omega} \arccos\left(\frac{\pm x_0}{A}\right) + n \frac{T}{2}$$



Schwebung

Beim strichen einer z.B. Geigensaiten werden neben der Fundamentalschwingung auch höhere Harmonische angeregt.

- Intensität der Schwebung: $I(t) = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 4P^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\delta \cdot t) \right)$
- Intensität schwingt mit Frequenz δ
- "Schwebungsfrequenz" = $\frac{\delta}{2} \Rightarrow \delta = 2 \cdot \text{Schwebungsfrequenz} \rightarrow$ so in Serie 4 definiert

Wellengleichung bestimmen

Falls man die Wellenfunktion zu einem bestimmten Ort oder Zeit kennt benutzt man: $y(x, t) = f(x \mp vt)$.

z.B.

$$y(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{allgemein: } f(x \mp vt) = \begin{cases} 0 & x \mp vt < 0 \\ 1-x \pm vt & 0 \leq x \mp vt \leq 1 \\ 0 & x \mp vt \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < \pm vt \\ 1-x \pm vt & \pm vt \leq x \leq 1 \pm vt \\ 0 & x \geq 1 \pm vt \end{cases}$$

Temperatur = Mass für Bewegung von Atom
= mittlere kinetische Energie

Ideale Gas: nicht wechselwirkenden Atom/Moleküle, punktförmige Atome oder Moleküle

Entropie Energy unavailable to produce work

Kelvin-Skala absolute Nullpunkt ist Nullpunkt der Kelvin Skala.

$T < 0K$ ist unmöglich

Gas thermometer mit Δ Druck

$$\Delta p = \frac{F}{A}$$

Dulong-Petit

$$c_M \approx 25 \frac{J}{mol K}$$

Für Festkörpern

Wärmeleitungsmechanismen

1) Wärmeleitung: Wärme Q fließt über Verbindung $T_H \rightarrow T_K$

$$\text{Temperaturgradient } \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{(T_H - T_K)}{\Delta x}$$

$$\text{Wärmestrom } I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \dot{Q} = k A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

mit k : Wärmeleitfähigkeit $[k]: \frac{W}{mK}$

Wärmewiderstand

$$R = \frac{\Delta x}{kA}$$

mit R ergibt sich: $\Delta T = R I$

2) Konvektion: Dichte Unterschied führt zu [↑] Umwälzungen: höhere Temp $\rightarrow$ geringere Dichte

3) Wärmestrahlung

$$P_e = e \sigma A T^4$$

mit σ : Stefan-Boltzmann konstante

P_e ist die gesamte von einem Körper abgestrahlte Leistung

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

e : Emissivität $[0 \dots 1]$

hängt von Oberfläche des Körpers ab

Verflüssigung von Luft im Linde-Verfahren

Prozessschritte im Linde-Verfahren:

- Kompression auf p_2 in V_2
- Trocknung
- Vorkühlung
- Expansion durch Drosselventil (Joule-Thompson Effekt) auf p_1
- Wärmetauscher/**Gegenstromkühler** zur Kühlung des einströmenden Gases
- Rückführung des Gases (V_{I_2}) und erneute Kompression
- Nach einigen Zyklen ist das Gas kalt genug, dass es den Kondensationspunkt erreicht (die Siedetemperatur unterschreitet) und sich im **Behälter** sammelt.

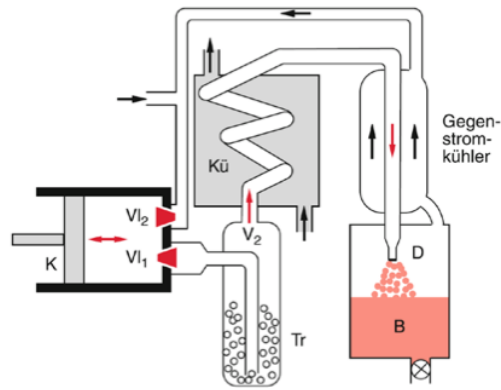
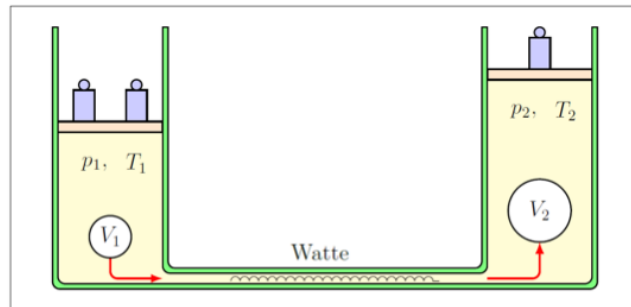


Abbildung 10.75 Schematische Darstellung des Linde-Verfahrens zur Luftverflüssigung

Der Joule-Thompson-Effekt

- Langsame (adiabatische) Expansion von Volumen V_1 , bei p_1 und T_1 in Volumen V_2 , bei p_2 und T_2 durch kleines Ventil, poröse Wand, Watte, etc.
- Hier neue Zustandsgrösse Enthalpie:

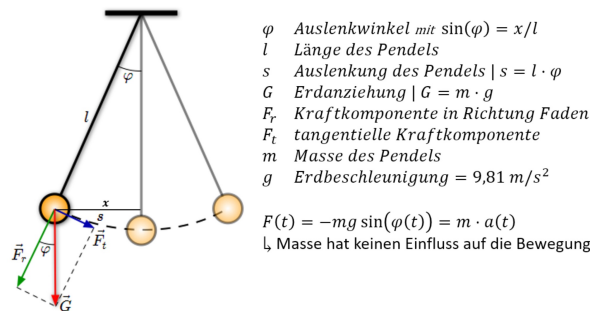
$$p_1 V_1 + U_1 = p_2 V_2 + U_2 = H = \text{const.}$$



→ Enthalpiedifferenz bei Kreisprozess ist 0. (da Zustandsgrösse)

Abbildung 3: Prinzip des Joule-Thomson-Effekts

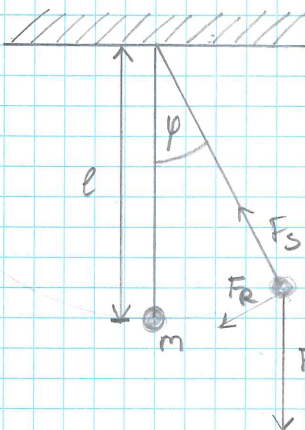
Federpendel



Bem: Für kleine Auslenkungen φ gilt:
 $\tan(\varphi) \approx \sin(\varphi) \approx \varphi$ & $\cos(\varphi) \approx 1$

Checklist:

- Alles was gefragt wird explizit ausdrücken.
- Einheiten nicht vergessen, überall, auch in Rechnungen schreiben.
- Alles in K umwandeln

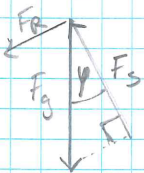
Fadenpendel $F_s \hat{=}$ Zugkraft des Fadens $F_R \hat{=}$ Rückstellkraft (resultiert aus F_s und F_g) $F_g \hat{=}$ Gewichtskraft

Wir wollen die zeitliche Entwicklung der Winkelauslenkung $\varphi(t)$ für zunächst unbekannte bzw. allgemeine Anfangswerte bestimmen. Dazu stellen wir eine

DGL für φ auf. Die tangentielle Beschleunigung der Masse m ist identisch $l\ddot{\varphi}$. Dies lässt sich leicht herleiten aus der auch bekannten Formel für Kreisbewegungen $v_t = \overset{\text{Radius}}{l} \overset{\text{Winkelgeschw.}}{\dot{\varphi}}$
 $\Rightarrow a_t = \dot{v}_t = l\ddot{\varphi}$
 $\quad \quad \quad \leftarrow \text{zeitlich konstant}$

Wie in obiger Skizze bereits ersichtlich ist F_R die tangential wirkende Kraft, die radialen Komponenten von F_s und F_g kürzen sich weg. Somit gilt also $F_R = m \cdot a_t$

Dies (F_R) wollen wir nun anders ausdrücken: Kleinwinkelnäherung



Wir sehen $F_R = F_g \sin \varphi = -mg \sin \varphi \approx -mg \varphi$

Nun führen wir das Gefundene zusammen:

$$m l \ddot{\varphi} = m a_t = F_R = -mg \varphi \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0}$$

Dies ist unsere DGL, welche der des harmonischen Oszillators mit Kreisfrequenz $\omega_0 := \sqrt{\frac{g}{l}}$ entspricht. Somit ist die allg.

Lösung gegeben durch

$$\varphi(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

wobei die reellen Konstanten durch die Anfangswerte bestimmt werden.

$$\text{Bsp.: AWP } \begin{cases} \varphi(0) = \frac{\pi}{20} \\ \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\pi}{20} &= A \cdot 0 + B \cdot 1 = B \\ 0 &= \omega_0 A \cdot 1 + \omega_0 B \cdot 0 = \omega_0 A \\ \Rightarrow B &= \frac{\pi}{20} \wedge A = 0 \end{aligned}$$

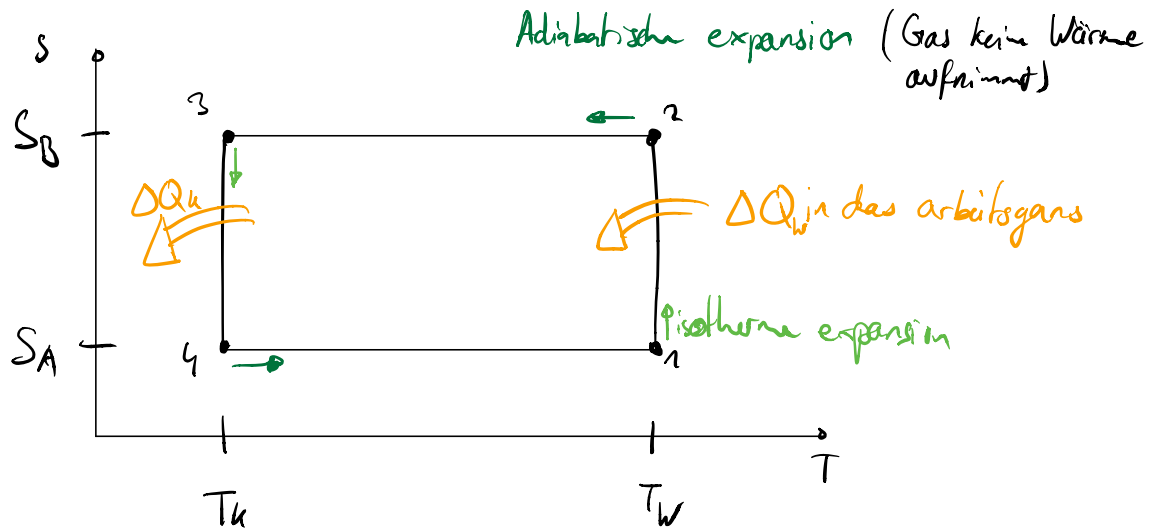
$$\Rightarrow \varphi(t) = \frac{\pi}{20} \cos(\omega_0 t)$$

p über Ideale Gasgleichung bestimmen

$$pV = \tilde{n}RT \Rightarrow p \frac{m}{\rho} = \tilde{n}RT \xrightarrow{\text{Für } \tilde{n}=1\text{mol}} p \frac{M}{\rho} = RT$$

Jetzt falls $p_1 = p_2$ & $T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{m_1}{\rho_1} = \frac{m_2}{\rho_2}$ bzw. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$

7.8 Temperatur - Entropie - Diagramm des Carnot-Prozess



den Wirkungsgrad lässt sich von diesem Graph berechnen:

$$\eta = \frac{\delta W}{\delta Q_W} = \frac{\delta Q_W - \delta Q_K}{\delta Q_W}$$

$$\frac{\delta Q_W - \delta Q_K}{\delta Q_W} \stackrel{\substack{\text{mit Def} \\ dS = \frac{dQ_{rev}}{T}}}{=} \frac{T_W (S_B - S_A) - T_K (S_B - S_A)}{T_W (S_B - S_A)} = 1 - \frac{T_K}{T_W}$$

§ 6 Wärme und 1. Hauptsatz:

Wärme: Form von Energie die durch Kontakt übertragen werden kann

Inner Energie:

$$U = \sum_i E_i = \sum_i E_{kin,i} + \sum_i E_{pot,i} = \underbrace{\gamma \frac{f}{2} RT}_{L_0=0 \text{ bei idealen Gasen}} = \tilde{n} C_V T$$

Zustandsgrösse: | Austauschgrösse:

U, T, p, V

Q, W

Änderung der inneren Energie nur vom Anfangs- und Endzustand abhängig, nicht von Zwischenzuständen.

$$\Delta U = U_E - U_A$$

1. Hauptsatz

$$\Delta U = W + Q \quad \text{oder} \quad dU = \delta W + \delta Q$$

W bzw. Q heisst Arbeits- bzw. Wärmezufuhr

abgeschlossenes System: $dU = 0$

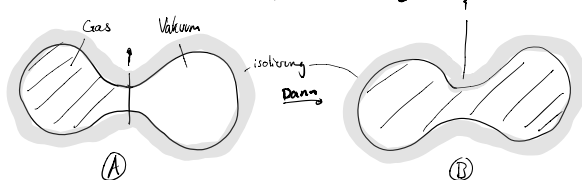
Konvention:

$\Delta Q > 0$ Wärme wird dem System zugeführt ($\Delta Q = \Delta Q^{\text{zu}}$)

$\Delta W > 0$ Arbeit wird am System verrichtet ($\Delta W = \Delta W^{\text{zu}}$)

J. Boyle Experiment für U eines idealen Gas:

$$U = n \langle E_{kin} \rangle = n \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot k_B T = \frac{3}{2} \tilde{n} R T$$



$$\left. \begin{array}{l} V_A = \frac{V_B}{2} \\ p_A = 2 p_B \end{array} \right\} \Rightarrow T_A = T_B!$$

Volumenarbeit W : am System verrichtet

$$W = - \int_{V_A}^{V_E} p dV$$

2. Hauptsatz:

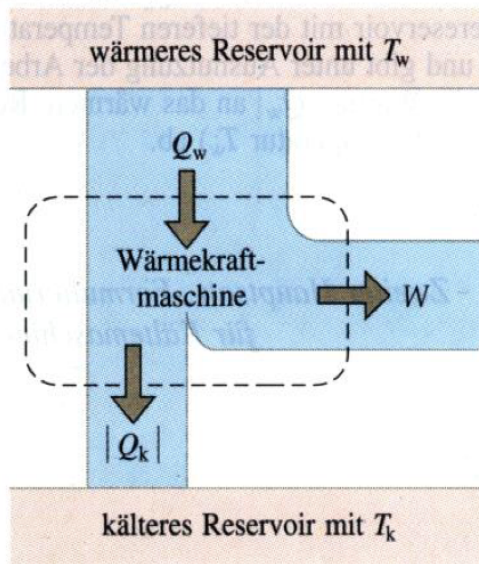
- Umwandlung mechanischer Energie in Wärme ist vollständig möglich.
- Jedoch unmöglich Wärme aus Einem Reservoir komplett durch Arbeit in mech. Energie zu überführen.
- Obige Aussagen basieren auf experimentellen Beobachtungen
- Wärme fließt spontan stets vom wärmeren ins kältere Reservoir (Wärmeleitung irreversibel)

Kreisprozesse: Folge von Zustandsänderungen eines Systems wobei Endzustand mit Anfangszustand identisch ist.

$$\Delta U = 0$$

$$\Rightarrow W = -Q = Q_{\text{ein}} - |Q_{\text{aus}}|$$

Wärmekraftmaschine: $|W| = Q_w - |Q_k|$

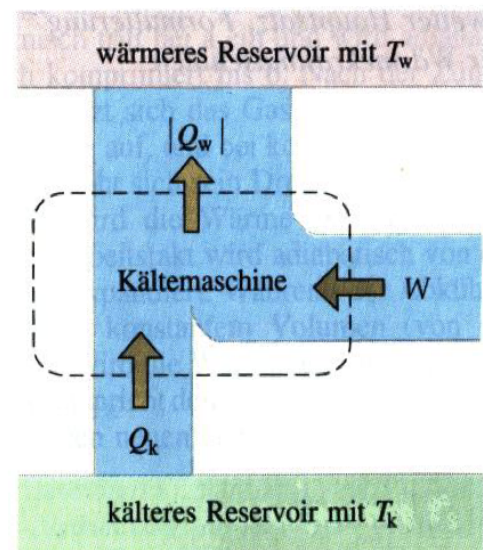


17.5 Das Prinzip der Wärmekraftmaschine. Sie entnimmt die Wärme Q_w einem Wärmereservoir mit der höheren Temperatur T_w , verrichtet die Arbeit W und gibt die Wärme $|Q_k|$ an ein kälteres Reservoir mit der Temperatur T_k ab.

$$\eta = 1 - \frac{|Q_k|}{Q_w}$$

Crée du travail mécanique à partir de chaleur d'un réservoir chaud.

Kältemaschine



17.6 Das Prinzip der Kältemaschine. Sie entnimmt die Wärme Q_k einem Wärmereservoir mit der tieferen Temperatur T_k und gibt unter Ausnutzung der Arbeit W die Wärme $|Q_w|$ an das wärmere Reservoir (Temperatur T_w) ab.

$$\eta = \frac{Q_k}{W}$$

Refroidit un réservoir grâce à l'apport d'énergie mécanique

Reversibilität: Wann ist es möglich?

- i) keine Reibung / Dissipation
- ii) Wärmeleitung nur zwischen Gegenständen nahezu gleicher Temperatur
- iii) Prozess muss quasistatisch sein (zu jedem Punkt Gleichgewicht)

Carnot - Maschine:

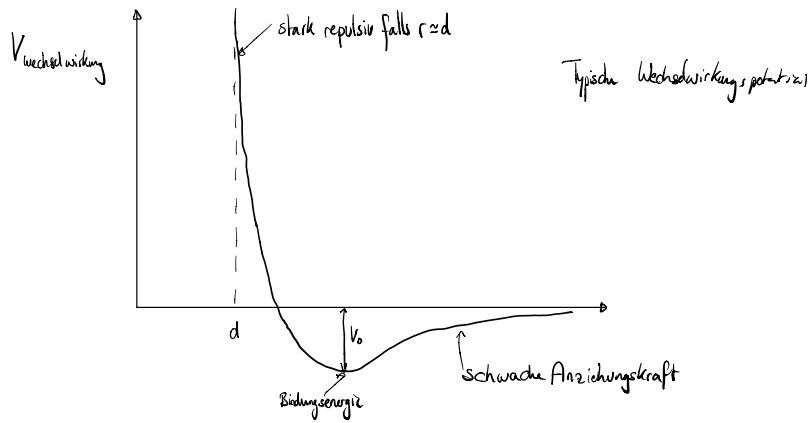
Es ist ein Art von Wärmekraftmaschine, perfekter Wirkungsgrad, kein Kreisprozess ist besser

$$\eta_{\text{real}} < \eta_C = \frac{T_w - T_k}{T_w}$$

Schritt:	A: (1 → 2)	B: (2 → 3)	C: (3 → 4)	D: (4 → 1)
Prozess:	isotherme Expansion	adiabatische Expansion	isotherme Kompression	adiabatische Kompression
Volumen	$V_1 \rightarrow V_2$	$V_2 \rightarrow V_3$	$V_3 \rightarrow V_4$	$V_4 \rightarrow V_1$
Temperatur	T_w	$T_w \rightarrow T_k$	T_k	$T_k \rightarrow T_w$
Arbeitsleistung	$\delta W_1' = \nu R T_w \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\delta W_2' = \nu C_V (T_w - T_k)$	$\delta W_3' = \nu R T_k \ln \frac{V_3}{V_4}$	$\delta W_4' = \nu C_V (T_w - T_k)$
Wärmezufuhr	$\delta Q_1' = \nu R T_w \ln \frac{V_2}{V_1}$	0	$\delta Q_2' = \nu R T_k \ln \frac{V_3}{V_4}$	0

$$\eta_C = \frac{\text{gewonnene Arbeit}}{\text{zugeführte Wärme}} = \frac{\delta W_1' + \delta W_2' - \delta W_3' - \delta W_4'}{\delta Q_1'} = \frac{T_1 - T_3}{T_1} < 1$$

Thermische Vorgänge



Van der Waals Gl:

(ideales Gas $pV = \tilde{n}RT$)

$$\left(p + a \frac{\tilde{n}^2}{V^2}\right) (V - b\tilde{n}) = \tilde{n}RT \quad (1)$$

• effektive Volumereduktion durch endliche Ausdehnung der Teilchen

Binnendruck durch
Anziehungskräfte der
Teilchen

b : molares Volumen (Volumen/mol)

$a > 0$ Maß für

- Gl. (1) beschreibt Verhalten realer Gas über weiten T & p Bereich
- insbesondere bei hohen Drücken Abweichungen von idealem Gas
- Gl (1) beschreibt Phasenübergang von flüssig nach gasförmig