

# EM-ZUSAMMENFASSUNG - Jean Mégrat -

<u>Konstanten</u>	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permittivität im freien Raum	$\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$	N/A <sup>2</sup>
Permeabilität im freien Raum	$c = 2,99 \cdot 10^8$	m/s
Lichtgeschwindigkeit		
<u>Größen &amp; Einheiten</u>		
Elektrisches Feld	$\vec{E}(\vec{r}, t)$	V/m
Magnetisches Feld	$\vec{B}(\vec{r}, t)$	Vs/m <sup>2</sup> = T
Elektrische Verschiebungsfeld	$\vec{D}(\vec{r}, t)$	As/m <sup>2</sup>
Magnetische Feldstärke	$\vec{H}(\vec{r}, t)$	A/m
Polarisation	$\vec{P}(\vec{r}, t)$	As/m <sup>2</sup>
Magnetisierung	$\vec{M}(\vec{r}, t)$	A/m
Leistung	P	VA = W = Nm/s
Kraft	F	N = kgm/s <sup>2</sup>
Ladungsdichte	$\rho(\vec{r})$	C/m <sup>3</sup>
Stromdichte	$\vec{j}(\vec{r})$	A/m <sup>2</sup>

## Maxwell Gleichungen

- Gauss  $\int \vec{D} \cdot \vec{n} da = \int \rho_{tot} dV$
- Faraday  $\int \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{n} da$
- Ampère  $\int \vec{H} d\vec{s} = \int \left[ \vec{j}_0 + \frac{d}{dt} \vec{D} \right] \cdot \vec{n} da$
- $\int \vec{B} \cdot \vec{n} da = 0$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{d\vec{D}}{dt} + \vec{j}_0 \iff \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}}{dt} + \mu_0 \vec{j}_{tot}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$$

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega \vec{D} + \vec{j}_0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

## Pre-Maxwell

Gesetz von Gauss:  $\int \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} da = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \int \rho(r, t) dV$  } Elektrostatik

Gesetz von Faraday:  $\int \vec{E}(\vec{r}, t) d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} da$

Gesetz von Ampère:  $\int \vec{B}(\vec{r}, t) d\vec{s} = \mu_0 \mu_r \int \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} da$  } Magnetostatik

kein magn. Monopole:  $\int \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} da = 0$

## Ladungserhaltung / Kontinuitätsgleichung

$$\int \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} da = -\frac{d}{dt} \int \rho(\vec{r}, t) dV \quad (\text{Strom} = \text{Verringerung der Ladung})$$

und Gesetz von Ampère muss modifiziert werden: \*

$$\int \vec{B}(\vec{r}, t) d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} da + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} da$$

## Einfluss der Materie

Durch Interaktion mit der Materie, induzieren  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  Ladungen und Ströme die als sekundäre Quellen charakterisiert werden können.

$$\rho \rightarrow \rho_0 + \rho_{pol}, \quad \vec{j} \rightarrow \vec{j}_0 + \vec{j}_{pol} + \vec{j}_{mag}$$

$$\int \vec{P}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} da = -\int \rho_{pol}(\vec{r}, t) dV$$

$$\frac{d\vec{P}(\vec{r}, t)}{dt} = \vec{j}_{pol}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\chi_e = \epsilon_r - 1$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\vec{D} - \vec{P})$$

$$\int \vec{M}(\vec{r}, t) d\vec{s} = \int \vec{j}_{mag}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} da$$

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{j}_{mag}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\chi_m = \mu_r - 1$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \iff \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

## Spektraldarstellung

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \vec{E}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Kondensator:  $Q = CU, W_c = \frac{1}{2} CU^2, E_0 = \frac{V}{d}$

## Helmholtz Theorem:

Jedes Vektorfeld ist definiert durch einen Divergenz- und einen rotations-freien Teil:

$$\vec{A} = \underbrace{\nabla \Phi}_{\text{rot-frei}} + \underbrace{\nabla \times \mathcal{U}}_{\text{div-frei}}$$

Laplace Gleichung:  $\Phi$  erfüllt die Laplace Gl. falls  $\Delta \Phi = 0$

Der Potential erfüllt die Laplace Gl. falls es keine freien Ladungen gibt ( $-\Delta \Phi = \rho :=$  Poisson Gl.)

## Ladungsverteilung:

Mikroskopisch, diskrete Punktladung:  $\rho(\vec{r}) = \sum q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n)$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum q_n \vec{v}_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rightarrow \vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}$$

Makroskopisch, kontinuierlich:

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Dispersion: Streng genommen ist  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  eine Funktion von allen  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  an allen anderen Orten und Zeiten +  $\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int \epsilon(\vec{r}, \vec{r}', t-t') \vec{E}(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt'$ . Ein Material ist: (i) spatio-temporally dispersive wenn  $\vec{D}$  von anderen Orten  $\vec{r}'$  abhängt. (ii) temporally dispersive wenn  $\vec{D}$  nur von vergangenen Zeiten abhängt.

In allgemeinen, können wir (i) ignorieren und nur (ii) betrachten:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int \epsilon(t-t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt' \leftarrow \text{Faltung im Zeitraum, in Frequenzraum erhalten wir}$$

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_\omega \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad \vec{B}(\vec{r}, \omega) = \mu_0 \mu_r(\omega) \vec{H}(\vec{r}, \omega)$$

$\vec{E}$  und  $\vec{H}$  sind divergenzfrei ( $\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{H} = 0$ )

## Elektrostatik und Magnetostatik

Coulomb Kraft:  $\vec{F}_c = q \cdot \vec{E}$   
 Lorentzkraft:  $\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$   
 $\vec{F}_{tot} = \vec{F}_c + \vec{F}_m = q(\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t))$

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \int \rho(\vec{r}', t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{j}(\vec{r}', t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) dV$$

Poissongleichung:  $\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon}$   
 $\vec{E} = -\nabla \phi$        $\phi$ : potential

Biot-Savard:  $\partial \vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^2}$

Potential:  $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$

$\vec{r}$ : Beobachtungspunkt  
 $\vec{r}'$ : Ladungsort

Coulombpotential:  $\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r} \iff \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$

Um das Potential zu bestimmen, berechnen wir die Energie die es braucht eine Testlad.

$W_{ab} = \int \vec{E} \cdot q d\vec{r}$  dann  $\phi(r_a) = \frac{V_a - V_b}{q} = \frac{W_{ab}}{q}$

Spannung:  $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{r}$

**Wellengleichung**

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = -\mu_0 \frac{d}{dt} (\vec{j}_0 + \frac{d\vec{P}}{dt} + \nabla \times \vec{M})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{H}}{dt^2} = \vec{\nabla} \times \vec{j}_0 + \vec{\nabla} \times \frac{d\vec{P}}{dt} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{M}}{dt^2}$$

Im freien Raum gibt es keine Quellen und Materie → rechte Seite wird zu Null

**Wellengleichung Freier Raum**

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = 0, \quad \vec{\nabla}^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{H}}{dt^2} = 0$$

Die homogene Wellengleichung lässt sich anhand der Separation der Variable lösen (d.h.  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{R}(\vec{r}) \cdot T(t)$ ). Mit dem Ansatz von d'Alembert  $\vec{E}(x, t) = \vec{E}(x \pm ct)$  welche eine Welle mit konstantem Geschwindigkeit  $c$  beschreibt. Wir erhalten:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \}$$

Mit dieser Ansatz kann man die Maxwell Gleichungen für monochromatische Felder (oszillieren mit einer Frequenz  $\omega$ ) schreiben:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r})$

Ebenso wenn wir die Ansatz für das E-Feld in Wellengleichung einsetzen, so erhält man:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) &= i\omega \vec{B}(\vec{r}) \\ \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) &= -i\omega \vec{D}(\vec{r}) + \vec{j}_0(\vec{r}) \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) &= 0 \end{aligned}$$

**Helmholtzgleichung**

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

mit  $k = n \cdot \frac{\omega}{c}$ . Die Lösung der Helmholtzgleichung ist gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{\pm i \vec{k} \cdot \vec{r}} = \vec{E}_0 e^{\pm i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

**Wellenvektor:**  $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$  zeigt in propagationsrichtung

**Dispersionsrelation:**  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \vec{k} \cdot \vec{k} = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} = |\vec{k}|^2$

Da die Maxwell Gleichungen immer erfüllt sein müssen, gilt:

$$\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{k} \Leftrightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = \vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0$$

**ebene Wellen:** wenn  $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$  dann  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \}$   
 "+" propagiert in Richtung von  $\vec{k}$

"-" propagiert gegen die Richtung von  $\vec{k}$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\omega \mu_0 n} (\vec{k} \times \vec{E}(\vec{r})) = \frac{1}{\omega \mu_0 n} (n \vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}))$$

**evaneszente Wellen:** Aus Dispersionsrelation:  $k_z = \sqrt{n^2 \frac{\omega^2}{c^2} - (k_x^2 + k_y^2)}$

Sei  $k_x^2 + k_y^2 > n^2 \frac{\omega^2}{c^2}$  gilt dann  $k_z \in \mathbb{C}$ ,  $k_z = i|k_z|$  und

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \vec{E}_0 e^{i(\pm(k_x x + k_y y) - \omega t)} e^{\mp |k_z| z} \}$$

wegen Energieerhaltung wählt man - für  $z > 0$ , + für  $z < 0$ , damit  $\vec{E}$  exponentiell abfällt und nicht abstrahlt

**wellen - relationen**

**Kreiswellenzahl:** Vakuum  $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$   
 Medium  $k = n \cdot \frac{\omega}{c} = k_0 n$

**Brechungsindex:**  $n_i = \sqrt{\epsilon_i \mu_i}$ , **Relative Brechungsindex:**  $\tilde{n} = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}$

**Kreisfrequenz:**  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = c \cdot k = c \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$

**Lichtgeschwindigkeit:** Vakuum  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$   
 Medium  $c_i = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_i \mu_0 \mu_i}} = \frac{c}{n_i}$

**Wellenimpedanz:**  $Z_i = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_i}{\epsilon_0 \epsilon_i}}$  [ $\Omega$ ] =  $\frac{1}{c \epsilon_0 \epsilon_i} = \frac{\mu_0 \mu_i}{c}$

**Wellenlänge:**  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

**Phasengeschwindigkeit**  $v_p = \frac{\omega_{carrier}}{k_{carrier}}$

**Gruppengeschwindigkeit**  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

**Phasen Differenz:**  $\varphi = \Delta d \cdot k$  ( $\Delta d$ : wegunterschied)

**Grenzflächen**

Stückweise homogene Medien sind Region in der die Materialparameter unabhängig von  $\vec{r}$  sind. So ein Region nennt man  $D_i$ . Innerhalb  $D_i$  gilt:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k_i^2) \vec{E}_i &= -i\omega \mu_0 \mu_i \vec{j}_{0,i} + \frac{\nabla \rho_{0,i}}{\epsilon_0 \epsilon_i} \\ (\nabla^2 + k_i^2) \vec{H}_i &= -\nabla \times \vec{j}_{0,i} \end{aligned}$$

Jedoch an Grenzflächen zweier Medien  $D_i$  und  $D_j$  (i.e.  $\partial D_{ij}$ ) müssen die Maxw.-gl. erfüllt sein, was zu die Randbedingungen führt

$$\begin{aligned} \vec{n} [\vec{B}_i(\vec{r}) - \vec{B}_j(\vec{r})] &= 0 \\ \vec{n} [\vec{D}_i(\vec{r}) - \vec{D}_j(\vec{r})] &= \vec{\sigma}(\vec{r}) \\ \vec{n} \times [\vec{E}_i(\vec{r}) - \vec{E}_j(\vec{r})] &= 0 \\ \vec{n} \times [\vec{H}_i(\vec{r}) - \vec{H}_j(\vec{r})] &= \vec{k}(\vec{r}) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \vec{B}_i \perp \vec{B}_j \\ \vec{D}_i \perp \vec{D}_j \\ \vec{E}_i \parallel \vec{E}_j \\ \vec{H}_i \parallel \vec{H}_j \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{*) } \vec{r} \in \partial D_{ij} \\ \leftarrow \text{ auf } D_j \end{array} \right\}$$

$\sigma(\vec{r})$  := Oberflächladungsdichte } meistens vernachlässigbar  
 $K(\vec{r})$  := Oberflächenstromdichte }

6 Gleichungen pro Materialübergang (parallele Komponenten bestehen aus 2 Vektor-Komponenten). Jedoch nicht alle linear unabhängig → 4 linear unabhängige Gleichungen und wie den Anzahl von Unbekannten:  $r, t, k \in \mathbb{R}^2$

\*) bedeutet: Tangential Komponente von  $E$  oder  $H$  muss verschwinden!  
 \*\*) bedeutet: normal Komponente von  $E$  oder  $H$  muss verschwinden!

**Polarisation** (~ wie orientiert sich die welle!)

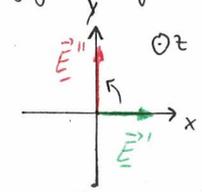
**linear polarisiert:**  $\vec{E}_0 \in \mathbb{R}^3$  zeigt in eine fixe Richtung

**zirkular polarisiert:**  $\vec{E}_0$  rotiert während sich die Welle ausbreitet. Ein zirkular polarisierte Welle kann man als Superposition zweier linear polarisierten Wellen schreiben die um  $90^\circ$ -Phasen versetzt sind.

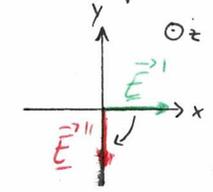
$$\vec{E} = \vec{E}' + i \vec{E}''$$

Man betrachtet 2 Händigkeitkeiten. Die unterscheidet man indem man schaut wie rotiert sich  $\vec{E}_0$  wenn man zur Quelle guckt (Welle ( $\vec{k}$ ) kommt zu uns).

linkszirkular (gegenuhrezigersinn)



rechtszirkular (im Uhrzeigersinn)



$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}' + i \vec{E}'' = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i k z}$$

$$\vec{E}(0, t) = E_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \begin{pmatrix} \cos(k_z z - \omega t) \\ -\sin(k_z z - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}' + i \vec{E}'' = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i k z}$$

$$\vec{E}(0, t) = E_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \begin{pmatrix} \cos(k_z z - \omega t) \\ \sin(k_z z - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Reflexion und Brechung

Das einfallende Feld  $\vec{E}_1 = \text{Re}\{\vec{E}_1 e^{-i\omega t}\}$  mit  $\vec{k}_1 = (k_{1x}, k_{1y}, k_{1z})$  sei uns bekannt. An Grenzfläche erzeugt  $\vec{E}_1$  Ladungen und Ströme, was neue Felder ( $\vec{E}_r$  &  $\vec{E}_2$ ) induziert.

Die Einfallebene ist definiert durch die Richtung von  $\vec{k}_1$  und die Normal  $\vec{n}$  zur Grenzfläche. (jetzt Einfallebene  $(k_x, y)$ )  
Die tangential-Komponenten von Grenzfläche von  $\vec{k}_1$  zur Grenzfläche (i.e.  $k_{1x} = (k_x, k_y)$ ) bleiben erhalten:

$$k_{1x} = k_{1rx} = k_{2x} = k_x \quad \text{und} \quad k_{1y} = k_{1ry} = k_{2y} = k_y$$

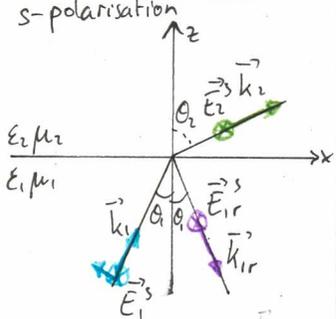
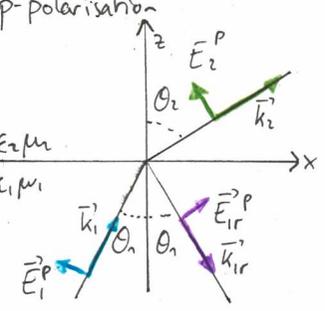
Die senkrechte-Komponenten von  $\vec{k}_1$  zur Grenzfläche (i.e.  $k_{1z}$ ) werden durch die Dispersionsrelation bestimmt:

$$k_{1z}^2 = k_{1r}^2 = n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k_{1rz} = -k_{1z}$$

$$k_x^2 + k_y^2 = (|\vec{k}_1| \sin \theta_1)^2 = (|\vec{k}_2| \sin \theta_2)^2 \Rightarrow k_{2z} = \frac{\omega}{c} n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1}$$

$$k_{2x}^2 + k_{2y}^2 + k_{2z}^2 = n_2^2 \frac{\omega^2}{c^2}$$

Aus disp. relation: Snellsche Gesetz  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$



## Fresnel Koeffizienten

p-polarisation:  $r^p = \frac{E_{1r}^p}{E_1^p} = \frac{\epsilon_2 k_{z1} - \epsilon_1 k_{z2}}{\epsilon_2 k_{z1} + \epsilon_1 k_{z2}}$

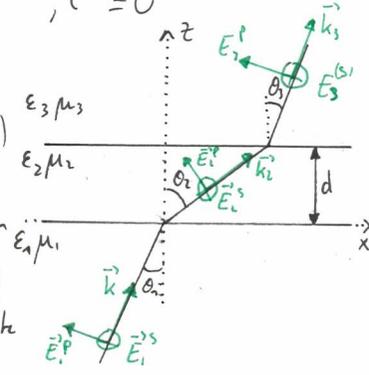
$$t^p = \frac{E_2^p}{E_1^p} = \frac{2\epsilon_2 k_{z1}}{\epsilon_2 k_{z1} + \epsilon_1 k_{z2}} \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_1}{\mu_1 \epsilon_2}}$$

s-polarisation:  $r^s = \frac{E_{1r}^s}{E_1^s} = \frac{\mu_2 k_{z1} - \mu_1 k_{z2}}{\mu_2 k_{z1} + \mu_1 k_{z2}}$

$$t^s = \frac{E_2^s}{E_1^s} = \frac{2\mu_2 k_{z1}}{\mu_2 k_{z1} + \mu_1 k_{z2}}$$

## Totalreflexion

$k_{z2} \in \mathbb{C} \Rightarrow 1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1 < 0 \Rightarrow \theta_k = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$   
Ab dem kritischen Winkel wird  $k_{z2}$  imaginär und  $\vec{E}_2$  evaneszent  
 $\hookrightarrow k_{z2} = i|k_{z2}|, r^{(s)} = e^{-id}, t^{(s)} = 0$



## Frustrierte Totalreflexion

Es gilt:  $n_2 < n_3 < n_1$  ( $n_i = \sqrt{\epsilon_i \mu_i}$ )  
Es gibt 3 Intervalle für  $\theta_1$  die verschiedene Effekte aufweisen

1.  $\theta_1 < \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$  oder  $k_{11} < n_2 \frac{\omega}{c}$   
 $\hookrightarrow$  Es treten nirgendwo evaneszente Felder auf.  
 $t_{ges} = \frac{t_{12} t_{21} e^{i\varphi}}{1 - r_{21}^2 e^{2i\varphi}}, \varphi = k_{z2} \cdot d$

2.  $\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) < \theta_1 < \arcsin\left(\frac{n_3}{n_1}\right)$  oder  $n_2 \frac{\omega}{c} < k_{11} < n_3 \frac{\omega}{c}$   
 $\hookrightarrow$  Frustrierte Totalreflexion (evaneszent in 2, propagierend in 3)  
 $|t_{ges}|^2 \approx |t_{12}|^2 |t_{21}|^2 e^{-2|k_{z2}|d}$

3.  $\theta_1 > \arcsin\left(\frac{n_3}{n_1}\right)$  oder  $k_{11} > n_3 \frac{\omega}{c}$   
 $\hookrightarrow$  Die Felder in 2 und 3 sind beide evaneszent.

## Poynting Theorem

Energiedichte:  $W = \frac{1}{2} [\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}]$   
Energieflussdichte:  $\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) \leftarrow$  Poynting Vekt  
Zeitgemittelter Poynting Vektor:  $\langle \vec{S}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})^*\}$   
Für ebene Wellen:  $\langle \vec{S}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{2Z_0} |\vec{E}(\vec{r})|^2 \vec{n}_k$

Bei einer evaneszenten Welle gibt es keinen Energie Transport in die Richtung in der die Welle abfällt. Dann ist die Entsprechung Komponent des Poynting Vektors gleich 0. Jedoch, führt die Interferenz zwischen 2 evaneszenten Wellen (z.B. bei frust. tot. re) zu einem netto Energietransport, da die nicht-linearität des Poynting Vektors ein Interferenzergebn erzeugt.

Intensität:  $I(\vec{r}) = \langle \vec{S}(\vec{r}) \rangle$

Leistung:  $P = \int \langle \vec{S}(\vec{r}) \rangle \cdot \vec{n} dA = \int I(\vec{r}) dA$

Intensität im freien Raum:  $I(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \langle \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle$   
es gilt für monochromatische Wellen

Ebene:  $I(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\vec{E}(\vec{r})|^2 = \frac{1}{2Z_0} \vec{E} \cdot \vec{E}^*$

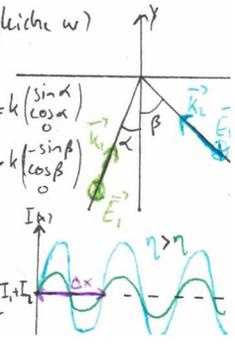
Evaneszent:  $I(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\underline{E}_0|^2 e^{-2kz}$

## Interferenz

Intensität von 2 Wellen  $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$  und  $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$ :  
 $I(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \langle [\vec{E}_1 + \vec{E}_2] \cdot [\vec{E}_1 + \vec{E}_2] \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2 + 2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \rangle = I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r}) + 2 I_{12}(\vec{r})$   
Interferenzglied.

## Koherente Felder (ebene, monochromatisch, gleiche $\omega$ )

Summe 2 Felder:  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{E}_1 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_2 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)}\}$   
Auf der x-Achse gilt:  
 $E(x, t) = \text{Re}\{[\vec{E}_1 e^{i(k_1 x - \omega t)} + \vec{E}_2 e^{i(k_2 x - \omega t)}] e^{-i\omega t}\}$   
 $I(x) = I_1(x) + I_2(x) + \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \text{Re}\{[\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* e^{i(k_1 + k_2)x} + \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_1^* e^{i(k_2 + k_1)x}]\}$   
Wenn jetzt  $\vec{E}_1$  &  $\vec{E}_2$  Real und entlang der z-Achse polarisiert.  
 $I(x) = I_1(k_1) + I_2(k_2) + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k_1 x + \phi)$   
 $\eta = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)}$ ,  $\eta = 1$  für  $k_1 = k_2$   
Period  $\Delta x = \frac{2\pi}{k_1 + k_2}$   
- 2 gegenläufige Wellen mit gleicher z-Richtung: Interferenz = 0



Inkohärente Felder (Zwei Wellen mit unterschiedlichen  $\omega_1, \omega_2$ )  
 $E(x,t) = \text{Re} \{ E_1 e^{i(k_1 x \sin \alpha - \omega_1 t)} + E_2 e^{i(k_2 x \sin \beta - \omega_2 t)} \}$   
 $I(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \text{Re} \{ e^{i(k_1 \sin \alpha + k_2 \sin \beta)x - i(\omega_1 + \omega_2)t} \}$   
 In praxis haben Wellen ein endliche  $\Delta \omega$  um  $\omega$ . D.h. es gibt nie absolute Kohärenz oder inkohärenz. Monochromatische Felder sind nur eine Approximation.

Potentiale & Green'sche Funktion

Skalare Potential:  $\Phi(\vec{r}, t)$  Vektor Potential:  $\vec{A}(\vec{r}, t)$   
 Dies sind Mathematische Hilfsmittel die die 4 Gleichungen für  $\vec{E}$  &  $\vec{B}$  von 5 auf 4 reduzieren.  
 $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) - \nabla \Phi(\vec{r}, t)$   
 $\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t)$   
 Die Definition von  $\vec{A}$  &  $\Phi$  sind nicht eindeutig!  $\vec{A} = \vec{A} + \nabla \chi$   $\Phi = \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$  gelten auch  
 Eichfunktion  $\chi(\vec{r}, t)$  beliebig

Da  $\nabla \cdot \vec{A}$   $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nicht beeinflusst, ist  $\nabla \cdot \vec{A}$  frei wählbar.  
Lorenz Eichung: wähle  $\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}$

$$\left[ \begin{aligned} \left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j} \\ \left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \end{aligned} \right. \left. \begin{array}{l} \text{2 entkoppelte PDE} \\ \text{(wenn eqn), für } \vec{A} \text{ und } \Phi \end{array} \right.$$

Coulomb Eichung: wähle  $\nabla \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \rho}{\partial t}$   
 (Poisson Gl.  $\rightarrow \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$ )

Skalare Green'sche Funktion  $G_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R}$   
 Dann für eine beliebige Ladungsverteilung  $\vec{B}(\vec{r}')$ :  
 $\vec{A} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{B}(\vec{r}') dV'$

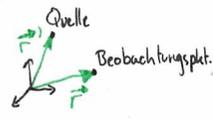
Green'sche Fkt eines Dipols im homogenen Medium, a.k.a. dyadische Green'sche Fkt  
 $\vec{G}_0 = k e^{ikR} \left[ \left(1 + \frac{ikR}{k^2 R^2}\right) \vec{I} + \frac{3-3ikR-k^2 R^2}{k^2 R^2} \frac{\vec{R}\vec{R}}{R^2} \right] = \left[ \vec{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] G_0(\vec{r}, \vec{r}')$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', R = |\vec{R}|, \vec{R}\vec{R} = \vec{R} \cdot \vec{R}^T, \vec{R} \times \vec{I} = (\vec{R} \times \vec{e}_x, \vec{R} \times \vec{e}_y, \vec{R} \times \vec{e}_z)$$

$$\nabla \times \vec{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} k (\vec{R} \times \vec{I}) \cdot \left( i - \frac{1}{kR} \right)$$

$$\vec{E}(\vec{r}') = \omega^2 \mu_0 \mu \vec{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \vec{P}$$

$$\vec{H}(\vec{r}') = -i\omega [\nabla \times \vec{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \vec{P}]$$



Nahfeld:  $R \ll \lambda$ , nur Terme die am schnellsten abfallen relevant  
 $\vec{G}_{NF} \propto \frac{1}{k^3 R^2} \rightarrow \vec{G}_{NF} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \frac{1}{k^2 R^2} \left[ -\vec{I} + \frac{3\vec{R}\vec{R}}{R^2} \right]$

Zwischenfeld:  $R \approx \lambda$   
 $\vec{G}_{ZF} \propto \frac{1}{k^2 R^2} \rightarrow \vec{G}_{ZF} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \frac{1}{kR} \left[ \vec{I} - \frac{3\vec{R}\vec{R}}{R^2} \right]$

Fernfeld:  $R \gg \lambda$  oder  $kR \gg 1$ , nur Terme die am langsamsten abfallen relevant  
 $\vec{G}_{FF} \propto \frac{1}{kR} \rightarrow \vec{G}_{FF} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \left[ \vec{I} - \frac{\vec{R}\vec{R}}{R^2} \right]$   
 Weit weg von der Quelle sieht also eine Abstrahlung wie ein ebene Welle.  
 Nur Fernfelder generieren ein Energiefluss.

Green'sche Funktion

Sei  $L$  ein beliebiges linearer Operator, z.B.  $[\nabla^2 + k^2]$  hermitesche op.,  $\vec{A}(\vec{r})$  in unbekanntes Vektorfeld und  $\vec{B}(\vec{r})$  ein bekannte Inhomogenität.  
 $L \vec{A} = \vec{B}$   
 Die Lösung dieses allgemeine inhomogenen Gleichung ist nicht einfach zu bestimmen, deswegen betrachten wir die einfachste Inhomogenität:  $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$   
 Die Lösung zur  $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$  als Inhomog. ist  $\vec{G}_i(\vec{r}, \vec{r}')$ :  $L \vec{G}_i(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$   
 integriert man über den ganzen Raum, multipliziert mit  $\vec{B}$ :  
 $\int L \vec{G}_i(\vec{r}, \vec{r}') \vec{B}(\vec{r}') dV' = \int \delta(\vec{r}-\vec{r}') \vec{B}(\vec{r}') dV' = \vec{B}(\vec{r}) = L \vec{A}(\vec{r})$

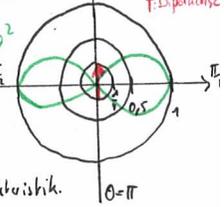
Das war jetzt für ein beliebiges operator.  
 Für die Helmholtz op.:  $\vec{G} = G_0$   $[\nabla^2 + k^2] G_0(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}')$

Dipol Moment:  $\vec{p} = q(t) d\vec{s} = q(t) \vec{r}_3 ds$   
Stromdichte:  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{p}(t) \delta(\vec{r}-\vec{r}')$   $q d\cos\theta = q \frac{d\vec{r}}{r} = \frac{d\vec{p}}{r}$   
Statischer Dipol:  $\Phi_{dipol} = \frac{q d}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi \epsilon} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$

Im Nahfeld des strahlende Dipole ist sein Feld von der Form des Feldes eines stat. Dipols ( $\vec{E}_{NF} = \text{Re} \{ -\nabla \Phi(\vec{r}) \} \cdot e^{-i\omega t}$ ), multipliziert mit einem zeitharmonischen Faktor.

Leistung eines strahlende Dipol:  $\vec{P}_0 = \frac{1}{12\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{\omega^4}{12\pi c^3} \mu_0 |\vec{p}|^2$

Im Fernfeld einer Dipol:  
 $|<S>| = \frac{1}{2Z} \frac{p^2 \sin^2\theta}{(4\pi \epsilon_0 \epsilon_r)^2} \frac{k^4}{r^2} \vec{n}$   
 $|<S>|_{max} = \sin^2\theta$   
 strahlt in Radialer Richtung, jedoch strahlt keine Leistung entlang seiner Achse.



In der Nähe einer Materialgrenze, andere Abstrahlcharakteristik.  
 Die Materialgrenze erzeugt ein 'strahltes'  $\vec{E}_s$ .  $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_0 + \vec{E}_s$   
 $\vec{P} = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \vec{p}^* (\vec{E}_0(\vec{r}_0) + \vec{E}_s(\vec{r}_0)) \} = \vec{P}_0 + \frac{1}{2} \text{Im} \{ \vec{p}^* \vec{E}_s(\vec{r}_0) \}$

Drehmoment eines Dipols:  $\vec{\tau} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{p}^* \times \vec{E} \}$ ,  $\tau = \frac{p}{\omega}$

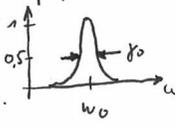
Sei ein Dipol am Ort  $\vec{r}_0 = 0$  welcher zu zeitpunkt  $t=0$  anfängt zu oszillieren.  
 Bewegungsgl.:  $\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} + \gamma_0 \frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \omega_0^2 \vec{p}(t) = 0$   
 $\hookrightarrow \text{Lsg: } \vec{p}(t) = \text{Re} \{ \vec{p}_0 e^{-i\omega_0 t - \gamma_0 t/2} \}$

Lorentz'sche Energiespektrum

Total abgestrahlte Energie pro einheitswinkel  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  und pro Frequenz-einheit ist:  
 $\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{p_0^2 \sin^2\theta \omega^4}{4\pi^2 c^3 \gamma_0^2} \frac{\gamma_0^2/4}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_0^2/4}$

Integriert man die lineshape fkt über alle werte erhält man  $\pi \gamma_0/2$ . Integriert man jetzt die ganze Funktion über alle Richtungen und  $\omega$ :  
 Lorentzian lineshape funktion

$W = \frac{p_0^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{\omega_0^4}{3c^3 \gamma_0}$  ← gleich die zeitgemittelte abgestrahlte Leistung eines Dipols dividiert durch  $\gamma_0$ .



### Feldwinkelspektrum

$$\vec{E}(k_x, k_y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint \vec{E}(x, y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

$$\vec{E}(x, y, z) = \iint \vec{E}(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

$$\vec{E}(k_x, k_y, z) = \vec{E}(k_x, k_y, 0) e^{\pm i k_z z}$$

$k_z = \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}$   
 Propagator  $H$   
 Tiefpassfilter:  $\vec{E}(k_x, k_y, z) \rightarrow \vec{E}(k_x, k_y, z)$

$$\vec{E}(x, y, z) = \iint \vec{E}(k_x, k_y, 0) e^{i(k_x x + k_y y \pm k_z z)} dk_x dk_y$$

### Paraxiale Approximation

Das Feld ist entlang einer Achse lokalisiert, Ausbreitung in die Richtung:  $k_x, k_y \ll z$

$k_z = k \sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}} \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}$   
 in der Phase,  $k_z = k$  } Amplitude  
 $k_z = k \cos \theta = k(1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots) \approx k - k \frac{\theta^2}{2}$  }  $k_x = k_y = 0$

### Gausse Strahlen

Paraxiale Näherung mit Gaußsche Verteilung

$$E(x, y, z) = E_0 e^{-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}} e^{i[kz - \eta(z) + kx^2/2R(z) - ky^2/2R(z)]}$$

Amplitude:  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + z^2/z_0^2}$   
 Phase (beam radius):  $\eta(z) = \arctan(z/z_0)$   
 Strahl Taille:  $R(z) = z(1 + z_0^2/z^2)$   
 Wellenfront Radius:  $z_0 = \frac{k w_0^2}{2}$   
 Phase Korrektur:  $\eta(z) = \arctan(z/z_0)$   
 Rayleigh Länge

Weit weg wird es sphärisch

$z_0$  ist die Länge, wo der Strahl ungefähr kollimiert bleibt, ausschhalb der Rayleigh Länge sind wir im Fernfeld.

### Fresnel und Fraunhofer Näherung

Quelle wird um eine kleine Distanz verschoben: Amplitude nicht gestört, Phase schon.

$$r(x', y') \approx R - \left[ \frac{x'x}{R} + \frac{y'y}{R} \right] + \frac{x'^2 + y'^2}{2R}$$

Fraunhofer

Übergang von Fresnel zu Fraunhofer passiert bei einer Distanz  $z_0$

$$z_0 = \frac{D^2}{\lambda}, D = 2 \cdot w_0 = 2 \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

Anders formuliert:  $r = |R - r'| \approx R - \frac{r'^2}{r}$

### Point-spread Function

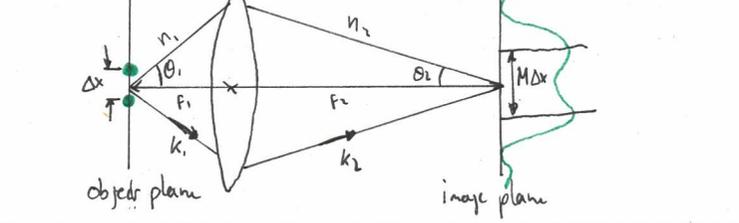
Measure of the resolving power of an imaging system. Narrower PSF  $\Rightarrow$  better resolution.

PSF defines the spread of a point source.

Numerische Apertur:  $NA = n_1 \sin \theta_{1,max} = n_2 \sin \theta_{2,max}$  ( $\sin \theta_{1,max} = \frac{f_2}{f_1} \sin \theta_{2,max}$ )

Vergrößerung:  $M = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{f_2}{f_1}$

Abbe'sche Auflösungsgröße:  $\Delta x = 0,6098 \frac{\lambda}{NA}$



### Paraxiale Approximation bis: In Zylinderkoordinaten gilt: $z \gg r$

$\Rightarrow$  für die Amplitude:  $k_z \approx k, k_{\rho} \ll k$

Den Durchmesser des Strahlkegels kann bei einer beliebigen Verteilung aus 2mal dem Radius bei dem das erste Minimum der Intensität geschieht

### Math-Werkzeuge

$(1+x)^a \approx 1 + ax, |x| < 1, |ax| \ll 1$   
 $\frac{1}{1-e^{-x}} \approx 1 + e^{-x}$   
 $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$   
 $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$   
 $\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \pi$   
 $\int_0^{\pi} \sin(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) dx = 2$   
 $\cos(\theta) \cos(\varphi) = \frac{1}{2}(\cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi))$   
 $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$   
 $\cos(\theta) \cos(\varphi) = \frac{1}{2}(\cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi))$

Ein Integral vom Typ  $\int_a^{\infty} e^{ikx} dx$  kann durch  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^{\infty} e^{(ik - \alpha)x} dx$  berechnet werden

$\frac{1}{z}(z + z^*) = \text{Re}\{z\}, z \in \mathbb{C}$   
 $|\vec{E}|^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}^*$   
 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Reihen:  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  für  $|q| < 1$

Zeitliche Mittel:  $\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int x dt$  (Terme mit  $e^{\pm i2\omega t}$  fallen weg)

Delta Funktion:  $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx = \mathcal{F}[1]$

$\int \delta(\vec{r}') A(\vec{r}') d\vec{r}' = A(\vec{r})$

Faltungseigenschaft:  $f(t) * \delta(t - \beta) = f(t - \beta)$

$\mathcal{F}[e^{iax}] = \delta(k_x - a)$

$\mathcal{F}[\text{sachs}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = \frac{\pi}{k} \text{sinc}(ks)$   $\text{sinc} = \frac{\sin(x)}{x}$

Weg-Integral: (i) Weg parametrisieren  $\gamma(t), t \in [0, 1]$

(ii) Berechnen:  $\int_C \vec{F} d\vec{s} = \int_0^1 \langle \vec{F}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt$

Flächenintegral: (i) Fläche parametrisieren:  $\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$   $u \in [a, b], v \in [c, d]$

(ii)  $\int_A \vec{F} d\vec{A} = \int_A \langle \vec{F}(\vec{r}), \vec{n}_d \rangle dA = \int_{ac}^{bd} \langle \vec{F}(\vec{r}(u, v)), \vec{n} \rangle du dv$

### Fernfeld-Approximation

für  $r \rightarrow \infty$  überlebt nur eine Ebene Welle. je nach Winkel gibt es eine andere seldliche Wellenlänge. Alle anderen löschen sich  $\rightarrow$  Interferenz.

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x/k \\ k_y/k \\ k_z/k \end{pmatrix}$$

$$E_{\infty}(s_x, s_y, s_z) = \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{(k_x^2 + k_y^2) \leq k^2} \vec{E}(k_x, k_y, 0) e^{i(k_x s_x + k_y s_y + k_z s_z)} dk_x dk_y$$

$= -2\pi i k s_z \vec{E}(k_s, k_s, 0) \frac{e^{ikr}}{r}$  falls das Feld zur Übertragung hin propagiert dann  $k_z \approx k$

$$E(x, y, z) = \frac{ice^{-ikr}}{2\pi} \iint_{(k_x^2 + k_y^2) \leq k^2} \vec{E}_{\infty} \left( \frac{k_x}{k}, \frac{k_y}{k} \right) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \frac{1}{k_z} dk_x dk_y$$

# Mathematische Grundlagen

## Koordinatensysteme

**Kartesisch**  
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$   
 $\theta = \arccos(z/r)$   
 $\varphi = \arctan(y/x)$

**Sphärisch**  
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$   
 $\theta = \arccos(z/r)$   
 $\varphi = \arctan(y/x)$

**Zylindrisch**  
 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$   
 $\varphi = \arctan(y/x)$   
 $z = z$

## Operatoren

### Gradient

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

### Divergenz

**Kartesisch**  $\nabla \cdot \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$   
**Sphärisch**  $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi (F_\varphi)$   
**Zylindrisch**  $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \partial_\varphi (F_\varphi) + \partial_z (F_z)$

### Skalarer Laplace

**Kartesisch**  $\Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f$   
**Sphärisch**  $\Delta f = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r f) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\theta (\sin^2 \theta \partial_\theta f) + \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \partial_\varphi^2 f$   
**Zylinder**  $\Delta f = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho f) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 f + \partial_z^2 f$

## + Identitäten

$$\nabla \times \nabla f = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

$$\nabla (f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$$

$$\nabla \cdot (f \cdot \vec{A}) = f \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \nabla f$$

$$\nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$$

$$\nabla (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}) - \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$$

$$\nabla \times (f \cdot \vec{A}) = f (\nabla \times \vec{A}) + \nabla f \times \vec{A}$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$$

## Einheitsvektoren

Kartesisch	$n_x = \sin \theta \cos \varphi n_r + \cos \theta \cos \varphi n_\theta - \sin \varphi n_\varphi$	$= \cos \varphi n_\rho - \sin \varphi n_\varphi$
	$n_y = \sin \theta \sin \varphi n_r + \cos \theta \sin \varphi n_\theta + \cos \varphi n_\varphi$	$= \sin \varphi n_\rho + \cos \varphi n_\varphi$
	$n_z = \cos \theta n_r - \sin \theta n_\theta$	$= n_z$
Sphärisch	$n_r = x/r n_x + y/r n_y + z/r n_z$	$= \rho/r n_\rho + z/r n_z$
	$n_\theta = \frac{xz}{r\sqrt{x^2+y^2}} n_x + \frac{yz}{r\sqrt{x^2+y^2}} n_y - \frac{x^2+y^2}{r\sqrt{x^2+y^2}} n_z$	$= z/r n_\rho - \rho/r n_z$
	$n_\varphi = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} n_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} n_y$	$= n_\varphi$
	$n_\rho = x/\rho n_x + y/\rho n_y$	$= \sin \theta n_r + \cos \theta n_\theta$
	$n_\varphi = -y/\rho n_x + x/\rho n_y$	$= n_\varphi$
	$n_z = n_z$	$= \cos \theta n_r - \sin \theta n_\theta$

## Rotation

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} (\partial_\theta (\sin \theta F_\theta) - \partial_\varphi F_\varphi) \\ \frac{1}{r} (\frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi F_r - \partial_r (r F_\varphi)) \\ \frac{1}{r} (\partial_r (r F_\theta) - \partial_\theta F_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \partial_\varphi F_z - \partial_z F_\varphi \\ \partial_z F_\rho - \partial_\rho F_z \\ \frac{1}{\rho} (\partial_\rho (\rho F_\varphi) - \partial_\varphi F_\rho) \end{pmatrix}$$

## Vektoridder Laplace

$$\Delta \vec{F} = \begin{pmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta F_r - \frac{2}{r^2} F_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} (\partial_\theta (\sin \theta F_\theta) - \partial_\varphi F_\varphi) \\ \Delta F_\theta - \frac{1}{(r \sin \theta)^2} F_\theta + \frac{2}{r^2} \partial_\theta F_r - \frac{2 \cos \theta}{(r \sin \theta)^2} \partial_\varphi F_\varphi \\ \Delta F_\varphi - \frac{1}{(r \sin \theta)^2} F_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \partial_\varphi F_r + \frac{2 \cos \theta}{r \sin \theta^2} \partial_\theta F_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta F_\rho - \frac{1}{\rho^2} F_\rho - \frac{2}{\rho^2} \partial_\varphi F_\varphi \\ \Delta F_\varphi - \frac{1}{\rho^2} F_\varphi - \frac{2}{\rho^2} \partial_\varphi F_\rho \\ \Delta F_z \end{pmatrix}$$

## Orthogonalitätsrelationen

$$n_x = n_y \times n_z \quad n_y = n_z \times n_x \quad n_z = n_x \times n_y$$

$$n_r = n_\theta \times n_\varphi \quad n_\theta = n_\varphi \times n_r \quad n_\varphi = n_r \times n_\theta$$

$$n_\rho = n_\varphi \times n_z \quad n_\varphi = n_z \times n_\rho \quad n_z = n_\rho \times n_\varphi$$

## Integrale

**Satz von Gauss**

$$\oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dV$$

**Satz von Stokes**

$$\oint_{\partial \Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_\Sigma \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

## Differentiale Elemente

$$d\vec{s} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin \theta d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\rho \\ \rho d\varphi \\ dz \end{pmatrix}, \quad d\vec{A} = \begin{pmatrix} dz dx \\ dx dy \\ dy dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ r \sin \theta dr d\varphi \\ r dr d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho d\rho d\varphi dz \\ \rho d\varphi dz \\ \rho d\rho d\varphi \end{pmatrix}$$

$$dV = dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \rho d\rho d\varphi dz$$