# Formelsammlung Analysis I & II

**HS 2018 & FS 2019: Prof. Alessandra Iozzi**

Jean Mégret

12. August 2019

## Grundbegriffe

### Allgemeines

offenes Intervall: $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
abgeschlossene Intervall $[c,d] := \{x \in \mathbb{R} : c \leq x \leq b\}$

**Symbole**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\vee$ | oder | $\exists$ | es gibt... | $\forall$ | für alle |
| $\wedge$ | und | $\exists!$ | genau ein | $\equiv$ | immer gleich |
| $\neg$ | nicht | $\nexists$ | kein | $:=$ | definition |

**Kreis**
Fläche: $A = \pi r^2$ Umfang: $U = 2\pi r$
Gleichung: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ od. kompl.: $|z - z_m| = r$

**Ellipse**
Kurvengleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$a$, $b$: Halbachsen (halber "Durchmesser")

**Kugel**
Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Oberfläche: $A = 4\pi r^2$
Gleichung: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$

**Kegel**
Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ Oberfläche: $A = \pi r^2 + \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$

**Mitternachtsformel** $\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

**Ebenengleichungen**
Allgemein:
$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$
Normalvektor: $\vec{n} = \nabla f = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
Falls *keine* Ursprungsebene ($\{0,0,0\} \notin$ Ebene):
$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1$
wobei $x_0, y_0, z_0$ die Achsenschnittpunkte sind

### Beweismethode

**Direkter Beweis** Einfach zeigen
**Indirekter Beweis** ¬A ist falsch $\implies$ A ist wahr
**Kontraposition** ¬B $\implies$ ¬A $\Leftrightarrow$ A $\implies$ B

**Vollständige Induktion** Zu beweisen: Aussage A(n) für alle $n \geqslant n_0$.
*Induktionsverankerung:* Beweise $A(n_0)$ direkt. (einfache $n_0$ wählen)
*Induktionsvoraussetzung:* Nimm an, dass $A(n)$ für ein $n \geqslant n_0$ gilt.
*Induktionsschritt:* Beweise $A(n+1)$ mit der Induktionsvoraussetzung.
Daraus folgt dann $A(n)$ für alle $n \geqslant n_0$.

### Mengenlehre / Topologie (Sei U eine Menge)

| | |
|---|---|
| *Inneres* von U | $U^\circ$ oder $U \setminus \{\partial U\}$ |
| *Rand* von U | $\partial U$ |
| *Offene* Menge | $U^\circ$ oder $\forall x \in U\ \exists\ K_\epsilon(x) \subset U$ |
| *Abgeschlossene* Menge | $U^c = \mathbb{R}^n \setminus U$ ist offen oder $\partial U$ ist erhalten |
| *Kompakte* Menge | Abgeschlossen und beschränkt |
| *Umgebung* | $K_\epsilon(a)$, Kreis mit radius $\epsilon > 0$ |

### Supremum und Infimum

**Begriffe**
Ein $x_0 \in X$ heisst:

| | |
|---|---|
| $max(X)$ | $\forall x \in X : x \leqslant x_0$, falls X offen, $\nexists\ max(X)$ |
| $sup(X)$ | („kleinste obere Schranke"), falls X offen, $sup(X) \notin X$ |
| $min(X)$ | $\forall x \in X : x \geqslant x_0$, falls X offen, $\nexists\ min(X)$ |
| $inf(X)$ | („grösste untere Schranke"), falls X offen, $inf(X) \notin X$ |

**Folgerungen**
Existiert $max(X)$, so ist $sup(X) = max(X)$
Existiert $min(X)$, so ist $inf(X) = min(X)$.

$sup(\varnothing) = -\infty$ $inf(\varnothing) = \infty$ .
$sup($ [nicht nach oben beschränkte Menge] $) = \infty$
$inf($ [nicht nach unten beschränkte Menge] $) = -\infty$ .

$max\{a+b, c+d\} \leq max\{a,c\} + max\{b,d\}$ $(a \leq max\{a,c\})$.

Jedes Intervall $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ , $]a,b[$ für $a < b$
hat Infimum a und Supremum b.

Die Teilmenge $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 1}\}$ hat Infimum 0, Maximum 1, aber kein Minimum.

Es gelten die Folgende Äquivalenzen:
$x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
$\forall x > 0$: $x \leq y \Leftrightarrow y^{-1} \leq x^{-1}$

### Summen und Produkte

**Grundregeln Summen**

i. Falls $p > q$: $\sum_{k=p}^{q} a_k = 0$ ii. $\sum_{k=p}^{q}(a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=p}^{q} b_k$

iii. $\sum_{k=p}^{r} a_k = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{r} a_k$ für $p \leqslant q \leqslant r$ iv. $a \cdot \sum_{k=p}^{q} b_k = \sum_{k=p}^{q} a \cdot b_k$

v. Index verschiebung $\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p+r}^{q+r} a_{k-r}$

**Teleskopsummen**

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$$

Eine Summe von Differenzen wird so umgeformt, dass sich je zwei Nachbarglieder (ausser dem ersten und dem letzten) gegenseitig aufheben. Bsp.:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} =$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

**Arithmetische Summe**
$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ und $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ (ungerade natürliche Zahlen)

**Geometrische Summe**
Die Summanden haben die Form $a_k = q^k$
Falls $q \neq 1$: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, mit $k = 1$: $\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q - q^{n+1}}{1-q}$
Falls $q = 1$: $\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$

**Grundregeln Produkte** i. Falls $p > q$: $\prod_{k=p}^{q} a_k = 1$

ii. $\prod_{k=p}^{r} a_k = \prod_{k=p}^{q} a_k \cdot \prod_{k=q+1}^{r} a_k$ für $p \leqslant q \leqslant r$ iii. $\prod_{k=p}^{q} a_k \cdot b_k = \prod_{k=p}^{q} a_k \cdot \prod_{k=p}^{q} b_k$

**Fakultät** $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdots n$

Spezialfall: $0! = 1$
Gamma-Funktion: $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ $(\alpha > 0)$
$\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$

**Binominalkoeffizient**
$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$ $\alpha \in \mathbb{C} k \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^k}{k!} = \binom{n}{n-k}$ für ganze Zahlen $n \geqslant k \geqslant 0$, $\binom{n}{n} = 1$

**Binomische Formel**
$(a+b)^n = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ für alle $n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

### Produktmetrik

Sei $X$ eine Menge. Eine Metrik d: $X \times X \to \mathbb{R}$ ist eine Abblidung $(x,y) \mapsto d(x,y)$, die die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. *Positiv definitheit*: $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
2. *Symmetrie*: Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x,y) = d(y,x)$.

3. *Dreiecksungleichung*: $\forall x, y, z \in X$ gilt $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

## Vektoren

**(Euklidscher) Betrag**
$|x| = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$

**Eigenschaften**
Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
$|x| = 0 \iff x = 0$ und $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$

**Dreiecksungleichung**
$|x + y| \leqslant |x| + |y|$
**(Euklidsches) Skalarprodukt**
$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R}^n$ für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$

**Eigenschaften**
Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
$\langle x, x\rangle = |x|^2$,
$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle x, \lambda y\rangle$,
$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
Sind ausserdem $x, y \neq 0$ und $\varphi$ der Winkel zwischen ihnen, so gilt
$\langle x, y\rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos\varphi$.
**Kreuzprodukt**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

## Komplexe Zahlen

**(Absoluter) Betrag** (Abstand des Punktes $(x, y)$ vom Ursprung):
$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ und somit auch $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$
**Komplex Konjugierte**
$\overline{z} = x - iy = r \cdot e^{-i\varphi}$
**Polarkoordinaten** $z = r \cdot e^{i\varphi}$
sonst: (Bsp.: $-8 \to r = 8, \varphi = 180° = \pi$ )
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
Polar $\to$ Kartesisch: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$
**Eigenschaften**

- $x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$
- $y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{(\overline{z})}$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

$\boxed{e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)}$ und $\boxed{e^{x+iy} = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y)}$

**Dreiecksungleichung**
$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

## $n$-te Wurzel einer Zahl berechnen

*Vorgehen*

1. Zahl in Polarform $(r \cdot e^{i\varphi})$ umwandeln (entweder direkt ablesen oder mit Umrechnungsformel)
2. $\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}}$ berechnen mit $k = 0, \ldots, n-1$
3. Lösungen wenn verlangt wieder in Normalform bringen

## f(x) als Produkt von Polynomen mit reellen Koeffizienten schreiben

1. Alle Nullstellen bestimmen $\to$ *n-te Wurzel einer Zahl berechnen*
2. $\to$ *Satz*: Komplexe NST kommen **immer** komplex konjugiert vor!
3. $f(x)$ als $(x - x_{0,+}) \cdot (x - x_{0,-}) \cdot (x - x_{1,+}) \cdot (x - x_{1,-}) \cdot \ldots$ schreiben und immer diejenigen Klammern, die zwei komplex konjugierte Nullstellen enthalten miteinander ausmultiplizieren $\implies$ alle $i$'s heben sich gegenseitig auf!

# Funktionen

## Beschreibung

| | |
|---|---|
| Funktion | $f(x) : X \to Y, x \mapsto f(x)$ |
| Definitionsbereich | $X = dom(f)$ |
| Zielbereich | $Y = range(f)$ |
| Bildmenge | $image(f) := \{f(x) : x \in X\}$ |

## Spezielle Funktionen

**Signum-Funktion**

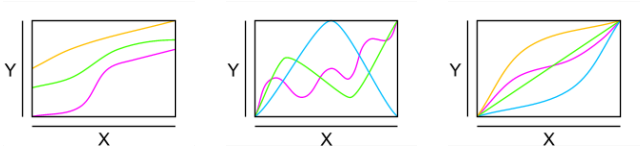
$$\text{sgn}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto sgn(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \text{ ist }, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \text{ ist }, \\ -1 & \text{falls } x < 0 \text{ ist }. \end{cases}$$

**Ab-, aufrundungsfunktion**
ab: $\lfloor x \rfloor := max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$
auf: $\lceil x \rceil := min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}$

## Eigenschaften

Eine Funktion $f : X \to Y$ heisst

| | |
|---|---|
| *injektiv* | falls gilt: $\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ |
| *surjektiv* | falls gilt: $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y, img(f) = range(f)$ |
| *bijektiv* | falls $f$ injektiv und surjektiv ist. Hat ein Inversefunktion |



*injektiv* *surjektiv* *bijektiv*

| | |
|---|---|
| *monoton steigend* | falls aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, oder $f'(x) \geqslant 0$ |
| *streng monoton steigend* | falls aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) < f(x_2)$, oder $f'(x) > 0$ |
| *monoton fallend* | falls aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, oder $f'(x) \leqslant 0$ |
| *streng monoton fallend* | falls aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) > f(x_2)$, oder $f'(x) < 0$ |

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst

| | | |
|---|---|---|
| *gerade* | falls gilt: | $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)$ (Spiegelsymmetrisch bez. y-Achse), |
| *ungerade* | falls gilt: | $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)$ (Punktsymmetrisch bez. Ursprung). |

Sei $f : X \to Y$ injektiv, f(x)=y, die Umkehrfunktion ist dann $f^{-}1$ mit:
i.$dom(f^{-}1) = img(f)$ ii. $range(f^{-}1) = dom(f)$ iii.$f^{-}1(y) = x$

## Stetigkeit

**Definition**
Die Funktion $f$ heisst *stetig in* $x_0 \in X$, falls gilt
$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
**Stetigkeitsbeweis**
Mit $\epsilon - \delta$ krit: $\delta(\epsilon)$ finden durch $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ und dann $|x - x_0| < \delta(\epsilon) = f(\epsilon)$
Sonst man betrachtet eine Problemstelle $x_0$ und nähert diese von beiden Seiten an. Dann es muss existieren und gelten:
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \implies$ **f ist stetig!**
**Lipschitz-stetigkeit**
Die Funktion $f$ heisst *Lipschitz stetig in* $x_0 \in X$, falls gilt
$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0| \forall x, x_0 \in X$ (D.h. endliche steigung)
Lipschitz-stetig $\implies$ stetig
**Komposition**
Folgende Funktionen sind auch stetig:

- Polynome
- rationale Funktionen, wo der Nenner $\neq 0$
- trigonometrische und hyperbolische Funktionen
- Exponential- und Logrithmusfunktionen

Sind die Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig, so sind auch $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $f/g$ für $g \neq 0$, $f \circ g = f(g(x))$, $f^{-1}(x)$ stetig
Ist die Funktion $f$ differenzierbar, so ist sie auch stetig.

## Funktionen stetig machen

*Stetig*: Grenzwert im kritischen Punkt muss existieren und gleich dem Funktionswert sein. 2 Aufgabentypen. Dann müssen die Parameter so gewählt werden, dass die Gleichungen stimmen.
**Typ 1**

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{für } x \leq x_0 \\ g_2(x) & \text{für } x > x_0 \end{cases}$$

$\implies$ stetig wenn: $\lim\limits_{x \to x_0^-} g_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} g_2(x)$
Wobei hier natürlich $\lim\limits_{x \to x_0^-} g_1(x) = g_1(x_0)$

**Typ 2**

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x \neq x_0 \\ a & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

$\implies$ stetig wenn: $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$
Wobei hier der Grezwert von g von links und rechts gleich sein muss.

## Zwischenwertsatz

Ist $f$ auf $[a, b]$ stetig, so nimmt $f$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ und sein Maximum und Minimum an einer Stelle in $[a, b]$ an. Das Bild

von $[a,b]$ ist abgeschlossen und beschränkt.

## Differenzierbarkeit

Eine Funktion die nirgends einen „Knick“ aufweist ist differenzierbar. In jedem Punkt $x_0$ muss der Limes der Ableitung von links dem Limes der Ableitung von rechts entsprechen.
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$

## Funktionen differenzierbar machen

*Punktweise Differenzierbar*: Differenzenquotient im kritischen Punkt muss existieren.

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

**Typ 1**

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{für } x \le x_0 \\ g_2(x) & \text{für } x > x_0 \end{cases}$$

$$f\prime(x) = \begin{cases} g_1\prime(x) & \text{für } x < x_0 \\ g_2\prime(x) & \text{für } x > x_0 \end{cases}$$

**Achtung** jetzt beide Intervalle offen, für $x = x_0$ keine Ableitung. Gehen mit Ableitungen von rechts und links in die Problemstelle
$\implies$ punktweise differenzierbar in $x_0$ wenn:
$\lim\limits_{x\to x_0^-} g_1\prime(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} g_2\prime(x)$
Wenn solche Funktionen differenzierbar, dann auch automatisch *stetig* differenzierbar!

**Typ 2**

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x \ne x_0 \\ a & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

$$f\prime(x) = \begin{cases} g_1\prime(x) & \text{für } x \ne x_0 \\ ?? & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

$\implies$ puntweise differenzierbar in $x_0$ wenn: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = a$ existiert.
$\implies$ stetig differenzierbar in $x_0$, wenn $\lim\limits_{x\to x_0} g_1\prime(x)$= a

# Grenzwerte

Ein *eindeutig bestimmter* Grenzwert $y_0$ wird geschrieben als $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$.
$f$ stetig in $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

**VORSICHT**
„Der Grenzwert $y_0$ **existiert**“ $\implies y_0 \ne \pm\infty$ und der rechtsseitige Grenzwert ist **gleich** dem linksseitigen Grenzwert!

**Einseitige Grenzwerte**
Ist ein Grenzwert $y_0$ verschieden wenn man sich von rechts oder links $x_0$ annähert unterscheidet man wie folgt:
*rechtsseitiger Grenzwert*: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\searrow x_0} f(x) = y_0$
*linksseitiger Grenzwert*: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x) = y_0$

**Grenzwert im Unendlichen** Ist eine Funktion $f(x)$ nach oben oder unten unbeschränkt (D.h. $\nexists N \in \mathbb{R}, \forall x \in X : x < N$ bzw. $x > N$) und nähert sich für $x \to \infty$ einem Wert $y_0$ an, nennt man diesen einen *Grenzwert im Unendlichen.*

**Uneigentliche Grenzwerte**
Bei einer Funktion $f(x)$ die für $x \to x_0$ gegen $\pm\infty$ strebt, nennt man den Grenzwert bei $x_0$ einen *uneigentlichen Grenzwert.*

**Nützliche Grenzwerte** für $x \in \mathbb{R}$

| | $\lim\limits_{x\to 0}$ | | | $\lim\limits_{x\to\infty}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim \frac{sin(ax)}{x}$ | $=$ | $a$ | $\lim a^x$ | $=$ | $0$ $(\lvert a\rvert < 1)$ |
| $\lim \frac{\tan x}{x}$ | $=$ | $1$ | $\lim \sqrt[x]{a}$ | $=$ | $1$ $(a \in \mathbb{R}^+)$ |
| $\lim x \sin \frac{1}{x}$ | $=$ | $0$ | $\lim \sqrt[x]{x^k}$ | $=$ | $1$ |
| $\lim \frac{x^2}{1-\cos x}$ | $=$ | $2$ | $\lim \sqrt[x]{x!}$ | $=$ | $\infty$ |
| $\lim \frac{e^x-1}{x}$ | $=$ | $1$ | $\lim \frac{x^n}{e^x}$ | $=$ | $0$ $(n \in \mathbb{N})$ |
| $\lim \sqrt[x]{1+x}$ | $=$ | $e$ | $\lim \frac{x}{\log x}$ | $=$ | $\infty$ |
| $\lim \frac{\log_a(1+x)}{x}$ | $=$ | $\frac{1}{\ln(a)}$ | $\lim x(\sqrt[x]{a}-1)$ | $=$ | $\ln a$ |
| $\lim \frac{a^x-1}{x}$ | $=$ | $\log a$ | $\lim(1+\frac{a}{x})^x$ | $=$ | $e^a$ |
| $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x$ | $=$ | $-\infty$ | $\lim(1-\frac{a}{x})^x$ | $=$ | $e^{-a}$ |
| $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \log^\beta x$ | $=$ | $0$ | $\lim \frac{\log^\beta x}{x^\alpha}$ | $=$ | $0$ $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^{>0}$ |
| $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$ | $=$ | $1$ | $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arctan x$ | $=$ | $\pm\frac{\pi}{2}$ |

- Zusätzlich gilt: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \sim \frac{\sin x}{x} \sim \frac{\arctan x}{x} \sim \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- Man kann auch die Limes umformen, z.B.:
$\lim\limits_{x\to\infty} e^{x^3-9} - 1 = x^3 - 9$ weil $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{x^3-9}-1}{x^3-9} = 1$

## Rechnen mit Grenzwerten

Wir betrachten die Funktionen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ und den Punkt $x_0$ mit $x_0 \in X\backslash\{x_0\}$, so dass der Grenzwert $y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert. Dann gilt, falls
$y_0 \in Y$ und $g$ stetig in $y_0$: $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0) = g(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))$,
$y_0 \notin Y$ aber $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = z_0$ existiert: $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = z_0 = \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$.

**Rechnen mit $\infty$**
Sinnvolle Berechnungen mit uneigentlichen Grenzwerten sind

| | |
|---|---|
| $x + \infty = \infty$, | $x - \infty = -\infty$, |
| $\infty + \infty = \infty$, | $\infty \cdot \infty = \infty$, |
| $x \cdot \infty = \infty$ für $x > 0$, | $0^\infty = 0$, |
| $x \cdot \infty = -\infty$ für $x < 0$, | $\infty^\infty = \infty$, |
| $\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$. | |

Sinnlose Berechnungen mit uneigentlichen Grenzwerten sind $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0^0$, $\infty^0$ und $\frac{0}{0}$.

**Rechenregeln**
Sofern die Grenzwerte von $f(x)$, $g(x)$ existieren und nicht $\pm\infty$ sind:

$\lim\limits_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
$\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
$\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
$\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)/g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) / \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, falls $g(x) \ne 0$
$\lim\limits_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = f\big(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\big)$

## Tricks

- **Vergleichskriterium / Sandwichkriterium**
Wir betrachten zwei Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}^n$:
Ist $\lvert f(x)\rvert \leqslant g(x)$ für alle $x$ nahe $x_0$, so gilt
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \implies \lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$
Ist $f(x) \geqslant g(x)$ für alle $x$ nahe $x_0$, so gilt
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty \implies \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

- **Brüche**
Dominanzen mit $\alpha > 1$
Für: $x \to \infty$: $\log(\log(x)) < \log(x) < x^n < \alpha^x, e^x < x! < x^x$
Für: $x \to 0^+$: $\log(\log(x)) < \log(x) < \frac{1}{x^\alpha}$
Wenn $\lim\limits_{x\to\infty}$ (bzw. $\lim\limits_{x\to 0}$) dann durch schnellste wachsende Term (funktion oder Potenz) oben und unten teilen.

- **Limes trennen**
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1}{k\cdot\dots\cdot 2\cdot 1}\frac{1}{2^n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\dots\cdot\frac{n-k+1}{n}}{k!}$
$= (\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1(1-1/n)\dots(1-\frac{k-1}{n})}{k!})(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{n^k}{2^n}) = \frac{1}{k!} \cdot 0 = 0$

- **Potenzreihe/Taylor**
Funktion der Form $f(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$. Wenn für $\lim\limits_{x\to 0}$ (Da den entwicklungspunkt oft 0 ist.). Für $g_1(x)$&$g_2(x)$ deren Potenzreihe einsetzen und Bruch vereinfachen.

- **Exp-log**
Funktion der Form $f(x) = g(x)^{h(x)}$.
$$\lim_{x\to a} g(x)^{h(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} h(x)\cdot log(g(x))}, \text{ für } g(x) > 0$$
Dann $\lim\limits_{x\to a} h(x) \cdot log(g(x))$ lösen und am schluss **in $e^{\cdots}$ einsetzen**

- **Substitution**
Einseitige Grenzwert. Mit $x \to u(x)$, $u_0 \to u(x_0{}^+)$, $g(u) = f(u(x))$
$$\lim_{x\to x_0{}^+} f(x) \to \lim_{u\to u_0} g(u)$$

- **Erweiterung 3. binomische formel (Wurzeltrick)**
$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

- **Bernoulli de l'Hôpital**
Sind $f$ und $g$ differenzierbar nahe $x_0$ und $g'(x) \ne 0$ und $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ beide gleich 0 oder beide gleich $\infty$, dann gilt
$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \quad (0\cdot\infty \to \frac{\infty}{1/0} \| \frac{0}{1/\infty}, \infty - \infty \to \frac{0}{0})$$

## Asymptote einer Funktion $f(t)$

Gesucht ist $y = pt + q$ für eine Funktion $f(t)$.

$\boxed{p = \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t}}$ und $\boxed{q = \lim_{t\to\infty} f(t) - pt}$

$\to$ Analoge Berechnung für $-\infty$

**Theorie**
2 Funktionen $f, g$ sind zueinander asymptotisch für $x \to \infty$ wenn gilt $\lim_{x\to\infty} (g(x) - f(x)) = 0$

$\to$ *waagrechte Asymptote*
Wenn Grad(Zähler) < Grad(Nenner): Asymptote ist $y = 0$.
Wenn Grad(Zähler) = Grad(Nenner): Asymptote ist $y = \frac{a_n}{b_n}$, wobei $a_n$ der Koeffizient der höchsten Zählerpotenz und $b_n$ der Koeffizient der höchsten Nennerpotenz ist.
$\to$ *senkrechte Asymptote*
Tritt auf bei Polstellen.
$\to$ *schiefe Asymptote*
Wenn Grad(Zähler) = Grad(Nenner) +1: Mit Polynomdivision lösbar.

## Kompaktheitssatz

Eine Menge $X$ heisst *beschränkt*, wenn alle ihre Elemente einen Wert $c$ nicht über-/unterschreiten.
Eine Funktion $f$ auf $X$ heisst *beschränkt*, falls $f(x)$ einen Wert $c$ für alle $x \in X$ nicht über-/unterschreitet.

**Kompaktheit**
Jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ heisst *kompakt*.

**Satz**
Für jede auf einer kompakten Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^m$ definierte stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}^n$ ist die Bildmenge image$(f) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

**Folgerungen**
Die Funktion $f$ ist stetig und hat endlichen Grenzwert für $x \to \infty \implies f$ ist beschränkt.
$f$ auf kompakter Teilmenge definiert und stetig $\implies f$ ist beschränkt.

# Folgen und Reihen

**Divergenz**: oszillieren oder streben gegen plus/minus Unendlich.
**Uneigentliche Konvergenz**: streben gegen plus/minus Unendlich.
**Konvergenz**: streben gegen einen bestimmten Wert.
**Absolute Konvergenz**: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heisst *absolut konvergent* $\iff \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

## Folgen

Eine *(unendliche) Folge in* $X$ ist eine Abbildung $\mathbb{Z}^{\geqslant 0} \to X, k \mapsto x_k$. (Der Laufindex kann irgendwo beginnen.) Alternative **Schreibweisen** sind: $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ oder $(x_k)_{k\geqslant 0}$ oder $(x_0, x_1, x_2, ...)$.
Eine Folge in $\mathbb{R}$ ist monoton und beschränkt $\implies$ sie ist *konvergent*.
Alle Regeln für Grenzwerte können auch für folgen angewendet werden. Züzätzlich gild
**Cauchy-Kriterium**
Falls $\lim_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}| \neq 0$, $a_n$ divergiert. (Reicht nicht für Konvergenz)

## Reihen

Eine *(unendliche) Reihe* ist ein Ausdruck der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ oder $\sum_{k\geqslant 0} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{C}^m$. (Der Laufindex kann irgendwo beginnen.)

**Wert**
Strebt die Reihe für $k \to \infty$ gegen eine bestimmten Wert oder $\pm\infty$ nennt man dies den *Wert der Reihe* und schreibt ihn wie folgt:
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \left( \sum_{k=0}^{k} a_k \right)$.

## Wichtige Reihen

**Geometrische Reihe**
$q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1 \iff$ konvergiert die Reihe, mit Grenzwert

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

**Riemann'sche Zetafunktion**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \begin{cases} \text{Konvergiert,} & \text{falls } s > 1 \\ \text{Divergiert,} & \text{falls } s \leq 1 \\ \text{Harmonische Reihe (grenzfall),} & \text{falls } s = 1 \end{cases} \text{ mit } s \in \mathbb{R}.$$

**Binomische Reihe**
Der *verallgemeinerte Binomialkoeffizient* ist für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gegeben durch
$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k(k-1)...1}$

und die *binomische Reihe* durch: $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot z^k$. **Umformung**

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k = (1+x)^\alpha} \quad \text{für alle } \alpha, x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < 1$$

Bernouillsche Ungleichung: Sei $x \geq -1$: $(x+1)^n \geq 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

## Konvergenzkriterien

- **Mit bekannte Reihen verleichen** (gleich || nach umformungen)
- **Nullfolge-Kriterium**
  Damit ein Reihe konvergieren kann muss die Folge konvergieren:
  $$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$
- **Leibnitz-kriterium, Alternierende Reihe**
  Seien $c_k$ Elemente einer monoton fallenden ($c_{k+1} \leq c_k$) Nullfolge:
  i. $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$ (Nullfolge)
  ii. $|\frac{c_{k+1}}{c_k}| \leq 1$ oder $\frac{d}{dk} c_k \leq 0 \;\; \forall\, x \geq 0$ (Monoton fallend)
  $\to \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k$ konvergiert
  *Achtung*: Durch Umordnen unendlich vieler Glieder einer nicht absolut konvergente Reihe verändert sich manchmal das Konvergenzverhaltender Reihe.
- **Majorantenkriterium** (Vergleichskriterium oben)
  Gilt $|a_k| \leqslant |b_k|$ für (fast) alle $k$ und ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine bekannte konvergente Reihe, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent*. Man kan 1 oder mehrere Dinge abschätzen, gut zu abschätzen sind sin und cos.
- **Minorantenkriterium** (Vergleichskriterium unten)
  Gilt $|a_k| \geqslant b_k$ für (fast) alle $k$ und ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine bekannte divergente Reihe, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.
- **Quotientenkriterium** (*gut für Fakultäten*)
  $$\boxed{q := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} \text{konvergiert absolut,} & \text{falls } q < 1 \\ \text{divergiert,} & \text{falls } q > 1 \\ \text{keine Aussage,} & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$
- **Wurzelkriterium** (*gut für Potenzen*)
  $$\boxed{L := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} \text{konvergiert absolut,} & \text{falls } L < 1 \\ \text{divergiert,} & \text{falls } L > 1 \\ \text{keine Aussage,} & \text{falls } L = 1 \end{cases}$$

## Rechnen mit Reihen

Im Folgenden konvergiert die rechte Seite genau dann bedingt oder absolut, falls es die linke Seite tut. Folgende Umformungen sind möglich:

i. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + ... + a_{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} a_k$

ii. $c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} c a_k$

iii. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$

Für $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ und $a_k \leqslant b_k$ für alle $k$:

iv. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} b_k$

Desweiteren (für alle absolut konvergenten mehrfachen Reihen):

v. $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,l} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{k,n-k}$

vi. $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_k b_l = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_l = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

## Wert einer Reihe bestimmen

1. Muster erkennen und mit Summenzeichen hinschreiben
2. Summenformel anwenden $\to$ *Reihen* $\to$ *Geometrische Reihe*

   **Hint:** Formel kann auch **abgeleitet** verwendet werden!

   $$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot q^k = \frac{q}{(1-q)^2} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot q^k = \frac{q \cdot (1+q)}{(1-q)^3} \qquad \dots}$$

Bsp.: $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot q^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot q^k - \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{d}{dq}\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^{k+1}\right) - \frac{1}{1-q} = \frac{d}{dq}\left(q \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) - \frac{1}{1-q} = \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) - \frac{1}{1-q} = ... = \frac{q}{(1-q)^2}$

# Potenzreihen

Taylorreihe in Punkt 0, Ausdrücke der Form:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

mit $\begin{cases} a_k \in \mathbb{R} & \text{heissen } \textit{reelle Potenzreihe in } z \\ a_k \in \mathbb{C} & \text{heissen } \textit{komplexe Potenzreihe in } z \end{cases}$.

Konvergiert eine Reihe an einem Punkt $p$, konvergiert sie auch an jedem anderen Punkt, der näher bei Null liegt als $p$.

## Konvergenzradius

*Vorgehen*

1. Überprüfen ob Reihe nicht unendlich viele Nullglieder hat, sprich ob $x^n$ steht und nicht $x^{3n}$ oder so.
   (Bei z.B. $x^{3n}$ Substitution $y = x^3$, bei $x^{2n}$ funktioniert Substitution nicht!!! $\implies$ vergleichen mit bekannten Reihen und Majoranten- / Minorantenkriterium anwenden)
2. Wurzel- bzw. Quotientenkriterium anwenden
3. Falls Substitution bei 1) jetzt rücksubstituieren und Radius berechnen

**Quotientenkriterium**

$$\boxed{\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|}$$

**Wurzelkriterium**

$$\boxed{\rho = \frac{1}{L} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}}$$

($\limsup$ ist der "grösste" Grenzwert, d.h. bei alternierenden Reihen: Fallunterscheidung; den grösseren der erhaltenen Konvergenzradien nehmen!)

**Bsp. Substitution**:

Berechne Konvergenzradius von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5k+2^k} x^{3k}$

1. Substitution $y = x^3$
2. Konvergenzradius mit $y$ berechnen, hier: 2
3. Rücksubstitution für $x$: $\rho = \sqrt[3]{2}$

**Konvergenz / Divergenz**

$|x| > \rho \quad \to \quad$ *divergiert*
$|x| < \rho \quad \to \quad$ *konvergiert*
$|x| = \rho \quad \to \quad$ *Rand des Konvergenzradius / keine Aussage*

Typische Aufgabe zu $|x| = \rho$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n\cdot 3^n} \cdot x^n$

- $\rho = 3 \implies$ Die Reihe konvergiert für $|x| < 3$.
- $|x| = 3 \implies$ Rand des Konvergenzradius. Speziell betrachten!

Gibt es Punkte auf dem Rand des Konvergenzradius, für die die Reihe konvergiert?

- Punkt für $x$ wählen, so dass Reihe alterniert: $x = -3$
- **Satz der alternierenden Reihe** anwenden:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \text{ konvergiert} \iff \lim_{n\to\infty} c_n = 0}$$

## Taylorreihe

**Satz**

*Die Taylorreihe von $f$ bzgl. der Stelle $x_0$ ist die Potenzreihe in $x - x_0$.*

**Taylorreihe**: $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

## Taylor-Approximation

**Taylorpolynom**: Endliche Taylorreihe. D.h. ein Approximation der funktion f in entwiklugspunkt $x_0$, mit Ordnung n.

$$\boxed{T_{x_0}^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k}$$

Der *n-te Restglied* $R_{x_0}^n$ ist der Fehler der Approximation n-ter Ordnung in $x_0$. $|R_{x_0}^n f(x_1)|$ ist den Abstand mit die tatsätzliche Wert von $f(x_1)$.

$$f(x) = T_{x_0}^n f(x) + R_{x_0}^n f(x)$$
$$R_{x_0}^n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$$

## Potenzreihenentwicklung um Punkt $a$ bestimmen

**Bei einer rationalen Funktion:**

1. Partialbruchzerlegung
2. Einzelne Brüche so umformen, dass man Formel anwenden kann:

$$\boxed{\frac{1}{1-\frac{x-a}{c}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{c}\right)^k (x-a)^k}$$

Anwendungen der Formel:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \text{ für } |x^2| < 1 \text{ oder auch}$$
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \text{ für } |x| < 1$$
$$\frac{1}{1-\left(\frac{z}{c}\right)^d} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{c}\right)^{d\cdot k} \iff \left|\frac{z}{c}\right| < 1 \qquad \text{mit } \rho = 1$$
$$\frac{1}{c\left(1-\frac{z}{c}\right)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{c}\left(\frac{z}{c}\right)^{k-1} \iff \left|\frac{z}{c}\right| < 1 \qquad \text{mit } \rho = c$$

*Wichtige Umformung für anderen Entwicklungspunkt*:

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2-z+1-1} = \frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k \text{ für } |z-1| < 1$$

3. Fertig, wegen Satz (oben).

*Beispiel*

$$\frac{x^2}{2+x} = x^2 \frac{1}{2-(-x)} = \frac{x^2}{2}\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} = \frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+2}}{2^{n+1}}$$

**Bei einer Wurzel:**

Term umformen, bis man Umformung bei $\to$ *Binomische Reihe* verwenden kann.

**Bei sin, cos, sinh, cosh und exp:**

1. Einsetzen der bekannten Potenzreihen für die jeweilige Funktion (stehen unter $\to$ *Potenzreihen* $\to$ *Exponentialfunktion / Trigonometrische - / Hyperbolische Funktionen*)
2. Koeffizienten zusammenfassen / zusammenschreiben

*Beispiel*: Schreibe $x \cdot \cos(x) + \frac{1}{x} \cdot \cosh(x)$ in Reihendarstellung:

$$x \cdot \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n)!} \text{ und } \frac{1}{x} \cdot \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$$

Zusammen folgt: $x \cdot \cos(x) + \frac{1}{x} \cdot \cosh(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1} + x^{2n-1}}{(2n)!}$

**Sonst**

Brute force: Ein paar ableitungen rechnen und schauen ob es immer das gleiche passiert.
Oder wichtige Reihen anschauen.

## Erste Glieder einer Potenzreihe / eines Taylorpolynoms mit Grad $n$ berechnen

Bsp.: Taylorpolynom von $e^x \cdot \sin(x)$ mit 5. Grad um $x_0 = 0$ berechnen.

**Ansatz Brute Force**:

1. 1. bis 5. Ableitung berechnen
2. In Formel $\to$ *Taylor-Aproximation* $\to$ *Taylorpolynom* einsetzen

**Ansatz Potenzreihe**:

1. Für $e^x$ und $\sin(x)$ die jeweiligen Potenzreihen bis und mit 5. Grad (oder bis wo auch immer gesucht ist) hinschreiben
2. Ausmultiplizieren (alles was den gesuchten Grad (hier 5.) übersteigt gerade weglassen)

**Ansatz Koeffizientenvergleich**

Bsp.: Die ersten $n$ Glieder von $\frac{1}{\cos(x)}$ berechnen.

1. $\frac{1}{\cos(x)} \cdot \cos(x) = 1$ verwenden
2. Links Polynom mit Unbekannten hinschreiben, rechts die jeweilige Potenzreihe:
   $(1 + a_2 x^2 + a_4 x^4) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) = 1$
3. Ausmultiplizieren
4. Koeffizientenvergleich

**Restterme angeben**

Potenzreihe bis Glied vom Grad $n$:

IMMER SO: $T_{x_0}^n f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n + \boxed{O(x^{n+1})}$

## Potenzreihen

**Standard**

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots$

$\sin(x) = \frac{(e^{ix}-e^{-ix})}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots$

$\cos(x) = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots$

$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$

$\cot(x) = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sinh(x) = \frac{(e^x-e^{-x})}{2} = -i\sin(ix) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ $\quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\cosh(x) = \frac{(e^x+e^{-x})}{2} = \cos(ix) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

$\operatorname{arsinh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2+1})$, $\operatorname{arcosh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2-1})$, $\operatorname{artanh}(y) = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}$

$e^z = \exp z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \dots$ für $z \in \mathbb{C}$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$

**Im Quadrat**

$[sin(x)]^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - \frac{x^8}{315} + \frac{2x^{10}}{14175} + O\left(x^{11}\right)$

$[cos(x)]^2 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + \frac{x^8}{315} - \frac{2x^{10}}{14175} + O\left(x^{11}\right)$

$[tan(x)]^2 = x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + \frac{62x^8}{315} + \frac{1382x^{10}}{14175} + O\left(x^{11}\right)$

## Trignometrische Zusammenhänge

- **Periodizität**
  $\sin(\varphi) = -\cos(\varphi + \frac{\pi}{2})$ $\quad \cos(\varphi) = \sin(\varphi + \frac{\pi}{2})$
  $\sin(\varphi) = \sin(\varphi + n \cdot 2\pi)$ $\quad \cos(\varphi) = \cos(\varphi + n \cdot 2\pi)$
  $\tan(\varphi) = \tan(\varphi + n \cdot \pi)$
  $\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha$
  $\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha$
- **Symmetrien**
  $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$, $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$, $\tan(-\varphi) = -\tan(\varphi)$
- **Addtionstheoreme**
  $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
  $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
  $\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)}$
  $\cot(x \pm y) = \frac{\cot(x)\cot(y) \mp 1}{\cot(y) \pm \cot(x)} = \frac{\cos(x \pm y)}{\sin(x \pm y)}$
- **Phytagoras**
  $\boldsymbol{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$
- **Sinussatz**
  $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$, $r$: Umkreisradius
- **Cosinussatz**
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$
- **Doppelwinkel**
  $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
  $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
  $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$
  $\sin(3x) = \sin(x) - 4\sin^3(x) = \sin(x)(4\cos^2(x) - 1)$
  $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$
  $\sin(4x) = 8\sin(x)\cos^3(x) - 4\sin(x)\cos(X)$
  $\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$
- **Produkte**
  $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$
  $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$
  $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$
  $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$
- **Potenzen**
  $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
  $\sin^3(x) = \frac{1}{4}(3\sin(x) - \sin(3x)$
  $\sin^4(x) = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)$
  $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
  $\cos^3(x) = \frac{1}{4}(3\cos(x) - \cos(3x)$
  $\cos^4(x) = \frac{1}{8}(3 + 4\cos(2x) + \cos(4x))$
- **Zusammenhänge**
  $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$
  $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$
  $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
  $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- **Integrieren**
  $\int_0^T \cos^n(t)dt = 0$ mit n ungerade
  $\int_0^T \sin^n(t)dt = 0$ mit n ungerade

## Hyperbolische Funktionen (sind *ungerade*)

- **Phytagoras**
  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- **Additionstheoreme**
  $\sinh(x \pm y) = \cosh(x)\sinh(y) \pm \sinh(x)\cosh(y)$
  $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$
- **Zusammenhänge**
  $\cosh(ix) = cos(x)$
  $\sinh(\pm ix) = \pm i\sin(x)$
  $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
  $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$
  $\cosh(\operatorname{arsinh}(t)) = \sqrt{1+t^2}$
  $\sinh(\arccos(t)) = \sqrt{t^2-1}$ für $t > 0$

## Trigonometrische Grössen

| $\varphi$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grad | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ |
| $\sin(\varphi)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\cos(\varphi)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\tan(\varphi)$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ |

| $\varphi$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grad | $180°$ | $210°$ | $225°$ | $240°$ | $270°$ | $300°$ | $315°$ |
| $\sin(\varphi)$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| $\cos(\varphi)$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| $\tan(\varphi)$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ |

## Exponentialfunktion

$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{z}{n}\right)^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$

Weiter $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ für $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$e = \exp 1 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 2.718\dots$

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gelten folgende **Umformungen**:

$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$ $\quad \exp(nz) = \exp(z)^n$

$\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1 \implies \exp(z) \neq 0$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten folgende **Umformungen**:

$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ $\quad |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$

Es gilt für alle $t, x, y \in \mathbb{R}$und $z \in \mathbb{C}$ :

$\boxed{e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)}$ und $\boxed{e^{x+iy} = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y)}$

desweiteren: $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$ $\quad e^{2\pi i} = 1$ und $e^{z+2\pi i} = e^z$

## Logarithmus

$\log : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ $\quad$ Wenn nicht spezifiziert: $\log = \ln$

$\log_t x = \frac{\log_c x}{\log_c t} = \frac{\ln x}{\ln t}$

Für $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$ und $t \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt:

| | |
|---|---|
| $\log 1 = 0$ | $e^0 = 1$ |
| $\log e^t = t$ | $e^{\log x} = x$ |
| $\log\frac{1}{x} = -\log x$ | $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ |
| $\log x^t = t \cdot \log x$ | $x^z = e^{z \cdot \log x}$ |
| $\log xy = \log x + \log y$ | $e^{x+y} = e^x e^y$ |
| $\log\frac{x}{y} = \log x - \log y$ | $e^{x-y} = e^x/e^y$ |
| $a^x = y \iff x = \log_a y$ | $e^x = y \iff x = \log y$ |

# Differentialrechnung einer Variablen

## Landausche Symbole

**Definition:** Sei $g$ eine Funktion auf X und $x \to x_0$ ein Grenzübergang.

- Der Ausdruck $\mathcal{O}(g(x))$, sprich *"Gross-$\mathcal{O}$ von $g(x)$"*, bezeichnet irgendeine Funktion $\varphi$, für die der Quotient $\frac{\varphi(x)}{g(x)}$ beschränkt ist für $x \to x_0$. ($\varphi(x)$ wächst ungefähr gleich wie $g(x)$)
- Der Ausdruck $o(g(x))$, sprich *"Klein-o von $g(x)$"*, bezeichnet irgendeine Funktion $\varphi$, für die der Quotient $\frac{\varphi(x)}{g(x)}$ gegen Null geht für $x \to x_0$. ($\varphi(x)$ wächst viel langsamer als $g(x)$)

## Ableitung

Eine Funktion $f$ heiss *differenzierbar in* $x_0 \in X$, falls gilt
$\exists a \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$.
Die Zahl $a$ ist dann eindeutig bestimmt und es gilt
$a = f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $(h = x - x_0)$
Die Funktion $f$ heisst *differenzierbar*, falls sie in jedem Punkt von $X$ differenzierbar ist. Dann gilt
$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

**Rechenregeln**
$(f+g)' = f' + g'$ $\quad (cf)' = cf'$ $\quad (fg)' = f'g + fg'$
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $\quad (g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}}$$

**Beispiel Herleitung Quotientenregel**
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h \cdot g(x)g(x+h)} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \left( \frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x) - \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \cdot f(x) \right) = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

**Beispiel 1**
$f(x) = y = e^x$, $f^{-1}(y) = x = \log(y)$
$y' = e^x$
Gesucht: $x' = \left(f^{-1}(y)\right)'$
$x' = \left(f^{-1}\right)'(y) = (\log(y))' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\log(y)}} = \frac{1}{y}$

**Beispiel 2**
$f(x) = y = \sin(x)$, $f^{-1}(y) = x = \arcsin(y)$
$y' = \cos$
Gesucht: $x' = \left(f^{-1}(y)\right)'$
$x' = \left(f^{-1}\right)'(y) = (\arcsin(y))' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, da $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

**Trick: Taylor entwicklung**
Mithilfe der Taylorentwicklung kann man die Ersten ableitungen bestimmen. Bsp:
$f(0)$ und $f'(0)$ von $f(x) = \frac{e^{5x}-1}{e^x-1} \to f(x) = \frac{1+5x+\frac{25x^2}{2}+o(x^2)-1}{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1} = (5 + \frac{25x}{2} + o(x))(1 + \frac{x}{2} + o(x))^{-1} = 5 + \frac{25x}{2} + o(x))(1 - \frac{x}{2} + o(x)) = 5 + 10x + o(x) \Longrightarrow f(0) = 5, f'(0) = 10$

## Kurvendiskussion

ACHTUNG: Immer Definitionsbereich bzw. Randpunkte beachten!

*Begriffe*

| | |
|---|---|
| **Konvex** | $f'' \geqslant 0$ |
| **Konkav** | $f'' \leqslant 0$ |
| Lokale Extrema: | |
| **lokales Maximum** | $f' = 0$ und $f'' < 0$ |
| **lokales Minimum** | $f' = 0$ und $f'' > 0$ |
| **Wendepunkte** | $f'' = 0$ |
| **Sattelpunkte** | $f' = 0$ und $f'' = 0$ |
| Globale Extrema: | |
| **Globales Maximum** | max(lokale Maxima, Randpunkte) |
| **Globales Minimum** | min(lokale Minima, Randpunkte) |

## Mittelwertsatz

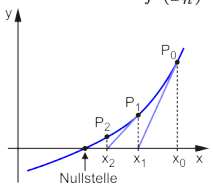
Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann gilt:
$\exists t \in ]a, b[ : f'(t) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

## Tangente an einen Punkt $a$ legen

$\to$ *Taylorpolynom 1. Ordnung* mit Entwicklungspunkt $a$ ausrechnen.

## Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren ist eine oft sehr effiziente Methode, eine Nullstelle einer Funktion zu finden.
Beginne mit einem Punkt $x_0 \in I$. Der Punkt $x_n \in I$ berechnet sich wie folgt:
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$




# Integralrechnung einer Variablen

## Riemannsches Integral

Seien eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, eine beliebige Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$ in $n$ Teilintervalle
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$
$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$
und in jedem Teilintervall eine Stützstelle gegeben:
$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $\quad (1 \leq k \leq n)$.
Jede *stückweise stetige* Funktion ist integrierbar. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Dann heisst $f$ **Riemann-integrierbar**, falls folgender Grenzwert mit $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$ existiert:

$$\lim_{max\{\Delta x_k\} \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi) \Delta x_k =: \int_a^b f(x)dx$$

Für die Berechnung einer Reihe:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx$$

Bsp: $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (akn + bn^2)^{-1/2} = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{akn+bn^2}} = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{a\frac{k}{n}+b}} = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})}{a}$

## Eigenschaften

$$\begin{aligned}
\int_a^c f(x)\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx && \text{falls } a < b < c. \\
\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \\
\int_a^b \lambda f(x)\,dx &= \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx && \text{für jedes } \lambda \in \mathbb{R}. \\
\int_a^b f(x)\,dx &\leqslant \int_a^b g(x)\,dx && \text{falls } \forall x \in [a, b] \colon f(x) \leqslant g(x) \\
\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| &\leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

## Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

**Definition:** Sei $f$ eine auf einem Intervall $I$ definierte Funktion. Dann heisst jede auf $I$ definierte differenzierbare Funktion $F$ mit $F' = f$ eine *Stammfunktion von f*.
**Uneingenliche Integral** (ohne Genzen): $\int f(x)dx = F(x) + C$

**Hauptsatz** Für jede stetige Funktion $f$ auf $[a, b]$ und jede Stammfunktion $F$ von $f$ gilt: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

## Standardintegrale

| $f\prime(x)$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $0$ | $c \in \mathbb{R}$ |
| $1$ | $1 + c$ |
| $x^n$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ |
| $\frac{1}{x}$ | $ln\|x\| + c$ |
| $e^x$ | $e^x + c$ |
| $a^x \ln a$ | $a^x + c$ |
| $a^x$ | $\frac{a^x}{ln\|a\|} + c$ |
| $sin(x)$ | $-cos(x) + c$ |

| $f\prime(x)$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $cos(x)$ | $sin(x)+c$ |
| $\frac{1}{cos^2(x)}$ | $tan(x)+c$ |
| $\frac{1}{sin^2(x)}$ | $-cot(x)+c$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $arcsin(x)+c$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $arctan(x)+c$ |
| $sinh(x)$ | $cosh(x)+c$ |
| $cosh(x)$ | $sinh(x)+c$ |
| $\frac{1}{cosh^2(x)}$ | $tanh(x)+c$ |
| $\frac{1}{sinh^2(x)}$ | $-coth(x)+c$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $arcsinh(x)+c$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $arccosh\lvert x\rvert+c$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ | $arctanh\lvert x\rvert+c$ für $\lvert x\rvert<1$ ; $arccoth(x)+c$ für $\lvert x\rvert>1$ |
| $cos(x)sin(x)$ | $\frac{sin^2(x)}{2}+c$ |
| $cos^2(x)$ | $\frac{cos(x)sin(x)+x}{2}+c$ |
| $sin^2(x)$ | $\frac{x-cos(x)sin(x)}{2}+c$ |

## Partielle Integration

$$\int_a^b \underbrace{u(x)}_{\downarrow}\underbrace{v'(x)}_{\uparrow}dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

*Typische Anwendungen*:

- Exponentialfunktion wird fast immer $v'(x)$ sein.
- 1 als $v'(x)$ wählen
  $\int log(x)dx = \int \mathbf{1}log(x)dx = \mathbf{x}log(x) - \int \mathbf{x}\frac{1}{x} = \mathbf{x}log(x) - x + c$
- Integrale, die immer wieder sich selbst ergeben!
  Bsp.: $\int e^{-2x}\cdot\sin(x)\ dx$
  $\Longrightarrow$ So lange partielle Integration anwenden (hier zwei Mal) bis man wieder das Integral selbst erhält (plus die ganzen Überreste der partiellen Integration). Umformen, dass das Integral nur noch auf einer Seite steht. *Achtung* Wenn man einmal festgelegt hat, was man auf- bzw. ableitet, muss dieses Schema beim nächsten Ableiten beibehalten werden!

## Substitution

$$\int_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

1. $\varphi(x) := t$, $\varphi'(x)dx := dt$ substituieren. $\varphi(x)$ muss bijektiv sein
2. Grenzen $a$, $b$ durch $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ ersetzen.
3. Integrieren.

| Integraltyp | Substitution | dx |
|---|---|---|
| $\int f(ax+b)dx$ | $u=ax+b$ | $dx=du\cdot\frac{1}{a}$ |
| $\int f(x)\cdot f'(x)dx$ | $u=f(x)$ | $dx=du\cdot\frac{1}{f'(x)}$ |
| $\int[f(x)]^n f'(x)dx$ $(n\neq-1)$ | $u=f(x)$ | $dx=du\cdot\frac{1}{f'(x)}$ |
| $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx$ | $u=g(x)$ | $dx=du\cdot\frac{1}{f'(x)}$ |
| $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$ | $u=f(x)$ | $dx=du\cdot\frac{1}{f'(x)}$ |
| $\int\sqrt{x^2+1}$ | $x=sinh(u)$ | |
| $\int f(\sqrt[n]{Ax+B})dx$ | $u=\sqrt[n]{Ax+B}$ | $dx=\frac{n}{A}\cdot u^{n-1}du$ |
| $\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx;$ | $x=a\cdot sin(u)$ | $dx=a\cdot cos(u)\cdot du$ |
| $\int R(x;\sqrt{a^2+x^2})dx;$ | $x=a\cdot sinh(u)$ | $dx=a\cdot cosh(u)\cdot du$ |
| $\int R(sin(x)$ ; $cos(x))dx$ Eventuell Trig. Pythag. | $u=tan(\frac{x}{2})$ $sin(x)=\frac{2u}{1+u^2}$ $cos(x)=\frac{1-u^2}{1+u^2}$ | $dx=\frac{2}{1+u^2}\cdot du$ |
| $\int R(sinh(x);$ $cosh(x))dx$ auch von $e^x$ | $u=e^x$ $cosh(x)=\frac{u^2+1}{2u}$ $sinh(x)=\frac{u^2-1}{2u}$ | $dx=\frac{du}{u}$ |
| $\int R(sin^2(x);$ $cos^2(x))dx;$ gerade Potenzen Trig. | $u=tan(x)$ $sin^2(x)=\frac{u^2}{1+u^2}$ $cos^2(x)=\frac{1}{1+u^2}$ | $dx=\frac{1}{1+u^2}\cdot du$ |
| $\int f(log(x))dx$ | $u=log(x)$ | $dx=e^u\cdot du$ |
| $\int\frac{1}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}dx$ | Quadratische Ergänzung | |
| $\int\sqrt{Ax^2+Bx+C}dx$ | Quadratische Ergänzung | |
| $\int\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ | $u=\sqrt{x}$ | $dx=2\sqrt{x}du$ |

$R\sim$Rationale Funktion

## Integration rationaler Funktionen

**Komplexe** Nullstelle kommen immer paarweise zusammen ($z$ & $\overline{z}$ )
Sei $\int\frac{p(x)}{q(x)}dx$, wir untescheiden die zwei Fällen:

**1.** $Grad(p)\geq Grad(q)\rightarrow$ **Polynomdivision**
Was machen wenn **Rest** übrigbleibt? Bsp.: $(x^3-x^2-3x+8):(x^2+x-2)=x-2$ mit Rest $x+4$
$\Longrightarrow$ Ergebnis: $x-2+\dfrac{x+4}{x^2+x-2}$ (rest mit PBZ lösen)

**2.** $Grad(p)\leq Grad(q)\rightarrow$ **Partialbruch Zerlegung (PBZ)**

- **einfacher reeller Nullstelle an** $x_1$,$x_2$:
  $$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$$
- **reeller Nullstelle mit Vielfachheit m an** $x_1$:
  $$\frac{1}{(x-x_1)^m}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-x_1)^m}=\frac{P(x)}{(x-x_1)^m}$$
  Wobei $P(x)$ ein Polynom vom Grad $m-1$
- **einfacher komplexer Nullstelle**:
  $$\frac{1}{(x^2+x+1)}=\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$
- **komplexer Nullstelle mit Vielfachheit p**:
  $$\frac{1}{(x^2+x+1)^p}=\frac{B_1x+C}{x^2+x+1}+\frac{B_2x+C}{(x^2+x+1)^2}+\cdots+\frac{B_px+C}{(x^2+x+1)^p}$$

Integrale können auf folgende Formen zurückgeführt werden:

$$\int\frac{cx+d}{x^2+ax+b}dx=\frac{c}{2}log|x^2+ax+b|+\frac{d-ac}{\sqrt{b-a^2}}\arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right)+C$$

$$\int\frac{x}{x+a}dx=\int\frac{u-a}{u}du=\int 1-\frac{a}{u}du=(x+a)-a\log|x+a|+C$$

$$\begin{aligned}
\int t^n\,dt &= \tfrac{t^{n+1}}{n+1}+c \qquad \text{für } n\geqslant 0\\
\int\tfrac{dt}{t} &= \log|t|+c\\
\int\tfrac{t\,dt}{1+t^2} &= \tfrac{1}{2}\cdot\log(1+t^2)+c\\
\int\tfrac{dt}{1+t^2} &= \arctan t+c\\
\int\tfrac{dt}{t^n} &= \tfrac{-1}{n-1}\cdot\tfrac{1}{t^{n-1}}+c \qquad \text{für } n>1\\
\int\tfrac{t\,dt}{(1+t^2)^n} &= \tfrac{-1}{2n-2}\cdot\tfrac{1}{(1+t^2)^{n-1}}+c \qquad \text{für } n>1\\
\int\tfrac{dt}{(1+t^2)^n} &= \tfrac{1}{2n-2}\cdot\tfrac{t}{(1+t^2)^{n-1}}+\tfrac{2n-3}{2n-2}\cdot\int\tfrac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}+c \qquad \text{für } n>1
\end{aligned}$$

## Umkehrfunktion

$$\int\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=f^{-1}$$

## Feynman Trick

**Beispiel**

$$\int_0^\infty x^6e^{-x}dx = \frac{d^6}{d\alpha^6}\Big|_{\alpha=1}\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx = \frac{d^6}{d\alpha^6}\Big|_{\alpha=1}\left(\frac{1}{-\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_{x=0}^\infty\right)$$

$(\alpha>0)$

$=\frac{d^6}{d\alpha^6}\Big|_{\alpha=1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)=720$

## Uneigentliche Integrale

- **Typ 1: Integralgrenzen in unenglichen**
  $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ mit $\lim_{x\to\infty}f(x)\rightarrow 0$

**Kriterium 1:** Direkte Berechung
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int\limits_{a}^{\infty} f(t)dt = \lim\limits_{R\to\infty}(\int\limits_{-R}^{a} f(t)dt + \int\limits_{a}^{R} f(t)dt)$,
beide müssen existieren. Bsp:
$\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{-b}^{b} xdx = 0$, aber: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xdx$ existiert nicht.
Für alle $s \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ gilt
$\int\limits_{a}^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{a^{1-s}}{s-1} & \text{für } s > 1, \\ \infty & \text{für } s \leqslant 1. \end{cases}$
**Kriterium 2:** Vergleichskriterium
$\int\limits_{a}^{\infty} f(t)dt := \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b} f(t)dt$

*1. Konvergenz*: $\alpha > 1, c > 1$ (Majorantenkriterium) $|f(t)| \leqslant \frac{c}{t^\alpha}$

*2. Divergenz*: $c > 0$: (Minorantenkriterium) $f(t) \geqslant \frac{c}{t}$

**Kriterium 3:** Absolute Konvergenz
Hilft nur zu bestimmen ob die Integral Konvergiert. Bsp:
$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{sin(x)}{x^2}dx$ Konvergiert da $\lim\limits_{x\to\infty} |\frac{sinx}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$

- **Typ 2: Unstetigkeit in c**
$\int\limits_{a}^{b} g(t)dt$ mit $\lim\limits_{t\to c} g(t) \to \infty$ und $c \in [a, b]$
**Kriterium 1:** Direkte berechnung
$\int\limits_{a}^{b} g(t)dt = \lim\limits_{\epsilon\to 0^-}\int\limits_{a}^{c+\epsilon} g(t)dt + \lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\int\limits_{c+\epsilon}^{b} g(t)dt$
**Kriterium 2:** Vergleichskriterium

$\lim\limits_{t\to a} g(t) \to \infty$
$\int\limits_{a}^{b} g(t)dt := \lim\limits_{a'\to a}\int\limits_{a'}^{b} g(t)dt$

*1. Konvergenz*: $\beta < 1, c < 1$ (Majorantenkriterium) $|g(t)| \leqslant \frac{c}{(t-a)^\beta}$

*2. Divergenz*: $c > 0$: (Minorantenkriterium) $g(t) \geqslant \frac{c}{t-a}$

**Wichtig**: Die Exponentialfunktion geht **schneller gegen 0** als jedes Polynom!

## Fläche zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$ von $a$ bis $b$

1. Alle Schnittpunkte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ in $[a, b]$ von $f(x)$ und $g(x)$ finden
2. $F = \int\limits_{a}^{x_0} |f(x)-g(x)|\ \mathrm{d}x + \int\limits_{x_0}^{x_1} |f(x)-g(x)|\ \mathrm{d}x + \cdots + \int\limits_{x_n}^{b} |f(x)-g(x)|\ \mathrm{d}x$ ausrechnen

## Anwendungen

**Formel von Wallis**

$\frac{\pi}{2} = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2^n \cdot n!)^4}{((2n)!)^2 \cdot (2n+1)}$

**Formel von Stirling**

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = 1$

# Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)

## Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

*Definition*:
$\boxed{a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = K(x)}$

- **homogen**: $K(x) = 0$
- **inhomogen**: $K(x) \neq 0$

*Beispiel:*
Die DGL $y''' + 3y + 4 = 0$ ist inhomogen (da die Form $y''' + 3y = -4$ ist) und heisst *inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.*

*Lösungsrezept*:
Die allgemeine Lösung ist die Superposition der homogenen und der partikulären Lösung:
$\boxed{y(x) = y_H(x) + y_P(x)}$

Homogene Lösung $y_H$:

1. Charakteristisches Polynom aufstellen:
$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ (Herleitung: $y(x) = e^{\lambda x}$)
2. Lösung des Polynoms $\Longrightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (Grad von P = Anzahl $\lambda$ mit multiplizität!!!)
3. Lösungsfunktion aufstellen anhand der Eigenwerte $\lambda_i$:
   - reelle Nullstelle
   $y_H(x) = A \cdot e^{\lambda x}$
   - $m$-fache reelle Nullstelle $(\lambda - a)^m$
   $y_H(x) = (A_1 + A_2 x + \cdots + A_m x^{m-1}) \cdot e^{\lambda x}$
   - komplex konjugierte Nullstelle $\lambda = a \pm bi$
   wie oben oder:
   $y_H(x) = A \cdot e^{ax} \cdot \cos(bx) + B \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx)$
   - $m$-fache komplex konjugierte Nullstelle wie oben oder:

$$y_H(x) = (A_1 + A_2 x + \cdots + A_m x^{m-1}) \cdot e^{ax} \cdot \cos(bx) + (B_1 + B_2 x + \cdots + B_m x^{m-1}) \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx)$$

*Beispiel*:
$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 5 \qquad \lambda_{4,5} = 3 \pm 5i$
$\Longrightarrow y_H(x) = A \cdot e^{-2x} + (B + Cx) \cdot e^{5x} + D \cdot e^{3x} \cdot \cos(5x) + E \cdot e^{3x} \cdot \sin(5x)$
(Die Variablen $A, \ldots, E$ sind mit den Anfangsbedingungen zu bestimmen.)

Inhomogene Lösung $y_P$:

1. Ansatz für $y_P(x)$ in *Abhängigkeit von* $K(x)$:

| Rechte Seite $K(t)$ | Spektralbedingung | Ansatz für $y_p$ |
|---|---|---|
| *const.* | | *const.* |
| $t^r$ | $0 \notin spec\ L$ | $A_0 + A_1 t + \ldots + A_r t^r$ |
| | $0 \in spec\ L$, m-fach | $(A_0 + A_1 t + \ldots + A_r t^r) \cdot t^m$ |
| $b_0 + b_1 t + \ldots + b_r t^r$ | $0 \notin spec\ L$ | $A_0 + A_1 t + \ldots + A_r t^r$ |
| $e^{\lambda_0 t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ | $\lambda_0 \notin spec\ L$ | $Ae^{\lambda_0 t}$ |
| | $\lambda_0 \in spec\ L$, m-fach | $At^m e^{\lambda_0 t}$ |
| $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$ | $\pm i\omega \notin spec\ L$ | $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ |
| | $\pm i\omega \in spec\ L$, 1-fach | $t(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$ |
| $t^2 e^{-t}$ | $-1 \notin spec\ L$ | $(A_0 + A_1 t + A_2 t^2)e^{-t}$ |

- Ist $\lambda \in spec\ L$ (d.h. Nullstelle des charackteristische Polynoms in $y_h$), dann ist der etsprechende Anstaz noch mit **t** zu multiplizieren.
item Liegt eine Linearkombination der Störfunktionen vor, so hat man auch als Ansatz eine entsprechede Linearkombination
- Sind Teile des entsprechenden Ansatzes oder multiplikative Anteile davon eine Lösung der zugehörigen homogenen DGL
- $L[\lambda] = 0$, wobei $\lambda$ die Nullstelle des charakteristischen Polynoms sei, so spricht man von *äusserer Resonanz.*
In diesem Fall ist der entsprechende Ansatz für $y_P(x)$ noch mit dem Faktor $t$ zu multiplizieren.
- Liegt zusätzlich noch *innere Resonanz* vor, d.h. $\lambda$ ist $\mu$-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so hat man den Ansatz für $y_P(x)$ mit dem Faktor $t^\mu$ zu multiplizieren.

2. Ansatz in DGL einsetzen

3. Koeffizienten mittels Koeffizientenvergleich bestimmen

**Lineare DGL mit komplexen Koeffizienten**
*Definition*:
$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = f(x) \mid a_n \in \mathbb{C}$

*Lösungsrezept*:

1. homogene Teillösung
   - charakteristisches Polynom
     $\Longrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$
   - Funktionsgleichung (wenn möglich <u>nicht</u> mit $\sin, \cos, \ldots$)
     $y_h(x) = A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} + \cdots + A_n \cdot e^{\lambda_n \cdot x}$
2. partikuläre Teillösung
   $\rightarrow$Gleiches Vorgehen wie bei „lineare DGL mit konstanten, reellen Koeffizienten“
   Bsp.: $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3i$
   $\Longrightarrow y_p(x) = A_1 \cdot e^{2x} + A_2 \cdot e^{-3ix}$

## Euler DGL

$$\boxed{a_n x^n y^{(n)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = f(x)} \qquad (x > 0)$$

oder

$$\boxed{(x) + \frac{b_{n-1}}{x} y^{(n-1)} + \cdots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n} y = 0} \qquad (x > 0)$$

*Vorgehen*

**1. Methode**

Ziel: Transformation auf lin. DGL mit konstanten Koeffizienten.

1. Annahme $y(x)$ ist eine Lösung der DGL
2. Für $x > 0$ sei $x(t) = e^t$ bzw. $t = \log(x)$ (Substitution)
3. Jede Term substituieren und einsetzen
   $\boxed{y(x(t)) = y(e^t) = h(t)}$
   $\boxed{xy'(t) = \dot{h}(t)}$
   $\boxed{x^2 y''(t) = \ddot{h}(t) - \dot{h}(t)}$
   $\boxed{x^3 y'''(t) = \dddot{h}(t) - 3\ddot{h}(t) + 2\dot{h}(t)}$
4. DGL in $h(t)$ lösen
5. Zurücktransformieren nach $x$, d.h. $t = \log(x)$ überall ersetzen
6. Optional: Testen durch einsetzen

*Beispiel*

$x^2 y'' - 2y = 40x^7 \qquad x > 0$

$\ddot{h} - \dot{h} - 2h = 40e^{7t} \Rightarrow h_h : \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow y(t) = Ae^{2t} + Be^{-t} + e^{7t}$

$\Rightarrow y(x) = Ae^{2\log(x)} + Be^{-\log(x)} + e^{7\log(x)} = Ax^2 + \frac{B}{x} + x^7$

**2. Methode (nur für homogene gleichung)**

1. Ansatz $y = x^\alpha$
2. Einsetzen mit:
   $\boxed{y(x) = x^\alpha}$
   $\boxed{y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}}$
   $\boxed{y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}$
   $\boxed{y'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}}$
3. Gleichung vereinfachen auf der Form: $x^\alpha(P(\alpha))$
4. Durch $x^\alpha$ teilen und $P(\alpha)$ lösen ($\alpha_{1,2,\ldots}$)
5. Lösung bilden mit $y(x) = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_1} + \ldots$

*Beispiel*

$x^2 y'' - 3xy' + 8y = 0 \qquad x > 0$

$x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - 3x\alpha x^{\alpha-1} + 8x^\alpha = 0 \Rightarrow x^\alpha(\alpha^2 - 4\alpha + 8) = 0 \Rightarrow$
$\alpha_{1,2} = 2 \pm 2i \Rightarrow y(x) = x^{2\pm 2i} \Rightarrow$ 2 unabhängige reelle Lösungen wenn
$y(x) = \Re(x^{2\pm 2i}) + \Im(x^{2\pm 2i})$
$\Rightarrow \Re(x^{2\pm 2i}) = \Re(e^{2\ln x} e^{2i\ln x}) = x^2(\cos(2\ln x))$,
$\Im(x^{2\pm 2i}) = x^2(\sin(2\ln x))$

## Separierbare DGL

*Ausgangslage*:

...ist eine DGL 1. Ordnung der Form:

$$\boxed{\frac{d}{dx} y(x) = f(x) \cdot g(y)}$$

*Lösungsrezept*:

1. Umformung
   $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Longrightarrow \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$
2. beide Seiten integrieren
   $$\underbrace{\int \frac{1}{g(y)} dy}_{G(y) \text{ gesucht}} = \underbrace{\int f(x) dx}_{F(x) \text{ gesucht}} + c$$
   ($G(y)$ und $F(x)$ sind die Stammfunktionen von $g(y)$ und $f(x)$.)
3. Umformen nach $y(x) = \ldots$

## Variation der Konstante (Spezialfall von Lineare DGL ...)

*Ausgangslage*:

$$\boxed{\frac{d}{dx} y(x) = a(x) \cdot y + b(x)}$$

*Lösungsrezept*:

$y(x) = F \cdot e^{A(x)} + P(x) \cdot e^{A(x)}$

Bedeutung der Variablen:

| | |
|---|---|
| $F$: | Konstante, mit Anfangs- / Randbedingungen zu bestimmen |
| $A(x)$: | Stammfunktion von $a(x)$ |
| $P(x)$: | ist definiert als $P(x) = \underbrace{\int b(x) \cdot e^{-A(x)} dx}_{\text{Stammfunktion gesucht}}$ |

*Achtung*: Ist Form: $a_0(x) \cdot y' + a_1(x) \cdot y = b(x)$

$\Longrightarrow y' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \cdot y(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}$

# Mehrdimensionale Differentialrechnung

## Grenzwerte und Stetigkeit in $\mathbb{R}^n$

Grenzwert ist wie in $\mathbb{R}$. $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ist an $\vec{x_0}$ stetig, falls $L = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Funktionen, die in $\mathbb{R}$ stetig sind, sind es auch in $\mathbb{R}^n$, ebenso wie Verkettungen und Brüche, wo der Nenner $\neq 0$.

**Tipps** Wenn möglich versuchen, das 2D Probem zu einem 1D-Problem zu machen

1. Substitution, z.B. $x = y^2$
2. Polarkoordinaten (Determinante nicht benötigt). Bietet sich an, wenn man $x^2 + y^2$ sieht!!

## Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}^n$

1. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst partiell differenzierbar, falls alle partiellenen Ableitungen für **alle** $\vec{x} \in \Omega$ exisitieren.
2. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst stetig partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen zusätzlich auch stetig sind.
3. f ist uberall differenzierbarän der Stelle $\vec{x_0}$ falls es eine lineare Funktion $T_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x+h) = f(x) + T_{\vec{x}}(h) + \mathcal{O}(|h|)$.
   Falls die partiellen Ableitungen stetig sind, ist f überall differenzierbar und $T_{\vec{x}}(h) =< \nabla f(\vec{x}), \vec{h} >$

$f_x$ und $f_y$ exisiteren **und** sind stetig $\Longrightarrow$ f überall differenzierbar $\Longrightarrow$ f stetig.

## Niveaumengen

Zeichne die funktion $f(x,y)$ zu höhe c: $f(x,y) = c$ umformen damit $y = f(x) \Rightarrow$ Nebenbedingung, Funktion verliert ein Dimension.

## Richtungsableitung

*Definition*

Für jeden **normierte** Einheitsvektor $e \in \mathbb{R}^n$ ist die **Richtungsableitung** von $f$ in Richtung $e_n$ im Punkt $\xi$ gleich:

$$\mathrm{D}_e f(\xi) = \frac{d}{dt} f(\xi + t \cdot e)\Big|_{t=0} = < \nabla f(\vec{x}), \vec{e} >$$

## Partielle Ableitungen

**1. Ordnung**: $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_x$ oder $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_y$

**2. Ordnung**: $\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} f(x,y) = f_{xx}$ , $\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} f(x,y) = f_{yy}$ , $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y)$

**Regel zum lösen**:

$\rightarrow$ Die anderen Variablen wie Konstanten betrachten.

Bsp.: $f(x,y) = x^2 + y$ , $\frac{\partial}{\partial x} = 2x$ , $\frac{\partial}{\partial y} = 1$

## Tangentialebene

Die Tangentialebene einer Fläche ist gegeben durch $(x_0, y_0, z)$ wobei:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$$

## Gradient

Der Gradient einer Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist der „Vektor mit allen partiellen Ableitungen der Funktion“:

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Der Gradient gibt die grösste Steigung im entsprechenden Punkt an.
*Spezialfall:* 2 Dimensionen:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \end{pmatrix}$$

## Lineare Approximation

Wir wollen eine Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ im Punkt $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ als *lineare Approximation* beschreiben. Dies funktioniert wie folgt:
$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx$

$$f(p_1, p_2, \dots, p_n) + (\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n))\Big|_{\substack{x_1=p_1 \\ x_2=p_2 \\ \dots \\ x_n=p_n}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix}$$

(Wobei “ $\cdot$ “ für das *Skalarprodukt* steht.)

*Spezialfall*: 2 Dimensionen:
Eine Funktion $f(x, y)$ im Punkt $P(x_0, y_0)$

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \nabla f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = f(x_0, y_0) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot (y - y_0)$$

(Wobei bei den langen vertikalen Strichen *zuerst* abgeleitet werden muss und *dann* die jeweiligen Werte eingesetzt werden müssen.)

## Kurven im Raum / Parametrisierungen

Eine Funktion, die aus einem Parameter einen Punkt im Raum produziert: $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n : t \to (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$
Wenn jede Funktion $f_1, f_2, \dots, f_n$ stetig ist, dann ist die Kurve stetig.
$f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_n'(t))$ ist der Tangentialvektor an der Kurve.

## Verallgemeinerte Kettenregel

$\Phi(t) = g(\vec{f(t)}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Verkettung von g und der Paramatrisierung $\vec{f(t)}$.

$$\boxed{\Phi'(t) = \langle \nabla g(x) \cdot f'(t) \rangle = \frac{\partial g(x(t)}{\partial x_1} \cdot f_1'(t) + \dots + \frac{\partial g(x(t)}{\partial x_n} \cdot f_n'(t)}$$

(Wobei $\nabla$ für den *Gradienten* steht und “ $\cdot$ “ für das *Skalarprodukt*. Die Partiellen Ableitungen von g werden an $\vec{f(t)}$ ausgewertet.)

(Wobei $\nabla$ für den *Gradienten* steht und “ $\cdot$ “ für das *Skalarprodukt*.)

***Spezialfall*: 2 Dimensionen:**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g(t)) = \nabla f(g(t)) \cdot \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial t}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial t}(t)$$

Beispiel:
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \big(\cos(t), \sin(t)\big)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(g(t)\big)\Big|_t = \nabla f\big(g(t)\big) \cdot \frac{\partial g}{\partial t} = 2\cos(t) \cdot (-\sin(t)) + 2\sin(t) \cdot \cos(t) = 0$$
$$g(t) \overset{\uparrow}{=\!=} \big(x(t), y(t)\big) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$$

*Spezialfall*: Jacobi-Matrix:
$D\big(g \circ f\big)(x, y, z) = Dg\big(f(x, y, z)\big) \cdot Df(x, y, z)$

## Ableiten unter dem Integral (Leibniz-Regel)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = f(b(t), t) \cdot b'(t) - f(a(t), t) \cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \left( \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right) dx$$

1. Alle Funktionen in Formel einsetzen
2. Wert für t einesetzen

**feste Grenzen**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$$

## Hessematrix

Die Hessematrix einer Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist definiert als:

$$H = \nabla^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} f & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_n} f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_2} f & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} f \end{pmatrix}$$

*Spezialfall*: 2 Dimensionen:
Eine Funktion: $f(x, y)$

$$H = \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

*Spezialfall*: 3 Dimensionen:
Eine Funktion: $f(x, y, z)$

$$H = \nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y, z) & f_{xy}(x, y, z) & f_{xz}(x, y, z) \\ f_{yx}(x, y, z) & f_{yy}(x, y, z) & f_{yz}(x, y, z) \\ f_{zx}(x, y, z) & f_{zy}(x, y, z) & f_{zz}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

## Taylorentwicklung 2-ter Ordnung

einer Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ im Punkt $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx f(p_1, p_2, \dots, p_n) + \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix} \cdot \nabla f\Big|_{\substack{x_1=p_1 \\ x_2=p_2 \\ \dots \\ x_n=p_n}}$$
$$+ \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix}^T \cdot \nabla^2 f\Big|_{\substack{x_1=p_1 \\ x_2=p_2 \\ \dots \\ x_n=p_n}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix} \right)$$
$$+ o\Big(\big|(x_1, x_2, \dots x_n) - (p_1, p_2, \dots, p_n)\big|^2\Big)$$

↳ *alle Terme 3. Ordnung, die nicht interessieren*

*Spezialfall*: 2 Dimensionen:
Die Taylorentwicklung 2-ter Ordnung der Funktion $f(x, y)$ im Punkt $P = (x_0, y_0)$ ist

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$
$$+ \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2$$
$$+ f_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + o\Big(\big|(x, y) - (x_0, y_0)\big|^2\Big)$$

## Determinanten und Eigenwerte

**Determinante einer $2 \times 2$ - Matrix**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \det A = ad - bc$$

**Determinante einer $3 \times 3$ - Matrix**
**(Methode: Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte)**

*Bsp.* 2. Zeile

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Vorzeichen **so** wählen:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$\det B =$

$$-a_{21} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{23} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

**Eigenwerte**
Um die Eigenwerte einer Matrix $A$ zu finden folgende Gleichung nach allen möglichen $\lambda$ auflösen:
$\det(A - \lambda I) = 0$ (wobei $I$ die Einheitsmatrix ist)
**ACHTUNG** Es gilt: $\det(A - \lambda I) = 0 \iff \det(\lambda I - A) = 0$

## Existenzsatz

**Lemma Kompaktheit**
i) ist $K \in X$ Kompakt $\implies$ $K$ ist abgeschlossen und beschränkt
($\implies K^c = X \setminus \{K\}$ ist offen)
ii) Wenn X = V endlichdimensionale normierte VR ist, dann gilt auch

die Umkehrung von i.
**Existenzsatz**
Ist $\Omega \in \mathbb{R}^n$ Kompakt und $f : \Omega \in \mathbb{R}$ stetig auf $\Omega$
$\Rightarrow$ f nimmt ein max/min auf $\Omega$.

## Analyse von kritischen Punkten

**Kritische (stationäre) Punkte**
Erstmal Existenzsatz überprüfen dann einer Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ erfüllen folgendes Gleichungssystem:

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

$\implies$ Auflösen dieses Gleichungssystems liefert die kritischen Punkte.

**Klassifizierung** (der kritischen Punkte)
Für kritische Punkte $P$ gilt:

- ausgeartete Punkte: $\det(H(P)) = 0$
  (bzw. mindestens ein Eigenwert der Hessematrix $= 0$)
- <u>nicht</u> ausgeartete Punkte: $\det(H(P)) \neq 0$
  - Lokales Minimum: alle Eigenwerte der Hessematrix sind positiv ($\lambda_i > 0 \forall i$) $\iff \nabla^2 f(x)$ *positiv definit*
  - Lokales Maximum: alle Eigenwerte der Hessematrix sind negativ ($\lambda_i < 0 \forall i$) $\iff \nabla^2 f(x)$ *negativ definit*
  - Sattelpunkt: die Eigenwerte der Hessematrix haben unterschiedliche Vorzeichen (nicht positiv oder negativ definit)

Für eine symmetrische ($\rightarrow$ Diagonalisierbar, d.h. $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)$) reelle $2 \times 2$-Matrix A gilt:

- *positiv definit* $\iff a > 0$ und $\det(A) > 0$ (minimum)
- *negativ definit* $\iff a < 0$ und $\det(A) > 0$ (maximum)
- *indefinit* $\iff \det(A) < 0$ (Sattelpunkt)
- *semidefinit* $\iff \det(A) = 0$ (keine ausssage ausser mit vozeichen Untersuchung)

Für eine symmetrische reelle 3x3 (oder grösser) Matrix B nützt man das Hurwitzkriterium:
Haupt minoranten berechen $(A_1, A_2, A_3, ...)$ dann:

- $A_i > 0 \ \forall i \implies$ positiv definit
- $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, ... \implies$ negativ definit
- sonst $\implies$ indefinit

## Satz der impliziten Funktion

Sei $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | F(x, y) = 0\}$.
Wenn für ein Punkt $(x_0, y_0) \in L$ gilt: $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ so existiert eine differenzierbare Funktion $x \rightarrow y = \phi(x)$ die lokal (mit Zentrum $(x_0, y_0)$) der Graph der Lösungsmenge $L$ ist.
Damit eine implizite Funktion in der Umgebung von $(x_0, y_0)$ explizit dargestellt werden kann, muss gelten:

- $F(x_0, y_0) = 0$
- $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

## Ableitungen von impliziten Funktionen

$F(x, \phi(x)) = 0$ Aus $\frac{d}{dx}(F(x, \phi(x))) = F_x(x, \phi(x)) + F_y(x, \phi(x))\phi'(x) = 0$ folgt:

$$\phi'(x) = -\frac{F_x}{F_y}(x, \phi(x))$$

$$\phi''(x) = \frac{-F_{xx}{F_y}^2 + 2F_xF_yF_{xy} - F_{yy}{F_x}^2}{{F_y}^3}(x, \phi(x))$$

analog für mehrere Dimensionen.

## Kurvenscharen in der Ebene

$$\Gamma : \mathbb{R} \curvearrowright \text{“Kurven in der } (x, y)\text{-Ebene“}, \qquad c \mapsto \gamma_c$$

Scharelement heisst ein Tripel $(x_0, y_0, c_0)$, wenn $F(x_0, y_0, c_0) = 0$ erfüllt ist. Ein Scharelement heisst regulär, wenn:

1. $(F_x, F_y)_{(x_0, y_0, c_0)} \neq (0, 0)$
2. $(F_c)_{(x_0, y_0, c_0} \neq 0$

$F_c(x, y, c) = 0$ berechnet die singulären Scharelemente, die die Einhüllende formen.
**Lösungsscharen von Differentialgleichungen**

1. $y'(x) = -\frac{F_x(x,y,c)}{F_y(x,y,c)}$
2. $F(x, y, c)$ nach $c$ auflösen und einsetzen
3. DGL: $y' = -\frac{F_x(x,y,c(x,y))}{F_y(x,y,c(x,y))}$

**Orthogonaltrajektorien**
Orthogonaltrajektorien sind Kurven, die in jedem Punkt senkrecht auf eine der Scharkurven steht. Es gilt folglich:
$y'_T(x, y) = -\frac{1}{y'(x,y)}$

## Reguläre Punkte

Reguläre Punkte sind Punkte, bei denen der *Gradient* **nicht verschwindet**:
$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$

**Theorie-Definitionen**
Seien $f, g_1, \dots, g_r$ differentierbare Funktionen $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $B := \{x \in U | g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$.

- Ein Punkt $x \in B$, in dem die Vektoren $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_r(x)$ *linear unabhängig* sind heisst **regulärer Punkt** von B.
- Ein regulärer Punkt $x$ von $B$ bei dem $\nabla f(x)$ eine Linearkombination von $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_r(x)$ ist, heisst **bedingt kritischer Punkt** von $f$ auf $B$.
  $\implies \nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \dots + \lambda_r \nabla g_r(x)$

## Lagrange-Methode

**Maximierungsproblem** (Für Punkte $x$ mit $\nabla f(x) \neq 0$)

1. Zu maximierende Funktion: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
2. Nebenbedingungen in „gleich-Null“-Form bringen
   $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$
   $F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$
   $\vdots$
   $F_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$
   (Bsp: $x^2 + y^2 = 1 \implies x^2 + y^2 - 1 = 0$)
3. Lagrange-Funktion aufstellen:
   $$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ -\lambda_1 \cdot F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ -\lambda_2 \cdot F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ - \dots \\ -\lambda_r \cdot F_r(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$
4. Folgendes Gleichungssystem ($r+n$ Gleichungen, $n+r$ Unbekannte) lösen:
   $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$
   $F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$
   $\vdots$
   $F_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$
   $\frac{\partial}{\partial x_1}\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) = 0$
   $\frac{\partial}{\partial x_2}\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) = 0$
   $\vdots$
   $\frac{\partial}{\partial x_n}\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) = 0$
5. Existenzsatz überprüfen und die Lösungen sind die *kritischen Punkte* der Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

## Funktionalmatrix / Jacobi-Matrix

Die Jacobi-Matrix einer Abbildung f: alte Koordinaten in fkt der neuen

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

ist definiert als:

$$J(x) = Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

## Funktionalmatrixdeterminante

$$J\left[f(x)\right] = \left|\sqrt{\det\Big(\big(Df(x)\big)^T \cdot \big(Df(x)\big)\Big)}\right|$$

*Bemerkung*
Ist $m = n$, gilt: $J\left[f(x)\right] = \left|\det\big(Df(x)\big)\right|$

*Anwendung*
Eine Funktion $\vec{f}(\vec{x})$ ist **lokal invertierbar**, wenn $\det\big(Df(x)\big) \neq 0$. Dann ist $\det(J_{f^{-1}})^{-1} = \det(J_f)$.
($f^{-1}$: neue koordinaten in fkt der alte)
$D\big(g \circ f\big)(x,y,z) = Dg\big(f(x,y,z)\big) \cdot Df(x,y,z)$
Nich vergessen: um der Det. zu berechnen kann man Zeil/Spaltemultiplikation rausziehen, und man kann die Matrix "Gaussen".

## Reguläre Funktion

*Definition* Eine differentierbare Funktion $f$ heisst regulär in einem Punkt $\xi \in \mathbb{R}^n$, wenn der Rang der Matrix $\nabla f(\xi)$ den maximal möglichen Wert ($\rightarrow \min\{m,n\}$) annimmt.
Regulär $\Rightarrow \det \neq 0$. Sonst singulär.

## Mehrdimensionale Integrale

*Allgemeine Definition*:
$\int\limits_{X_1}\int\limits_{X_2}\dots\int\limits_{X_n} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\mathrm{d}x_n\dots\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1$

*Bessere Darstellung* (Klarheit schaffen!):
$$\int\limits_{X_1}\left(\int\limits_{X_2}\dots\left(\int\limits_{X_n} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\mathrm{d}x_n\right)\dots\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1$$

*Auflösen*:
„von innen nach aussen“

## x/ y- einfache Bereich

**y-einfach**: x ist fix. $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\} \Rightarrow$ Integrationsreihenfolge $dydx$
**x-einfach**: y ist fix. $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R} : a \leq y \leq b, h(y) \leq x \leq k(y)\} \Rightarrow$ Integrationsreihenfolge $dxdy$

## Satz von Fubini

Es gilt:
$$\int\limits_I\left(\int\limits_J f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int\limits_J\left(\int\limits_I f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

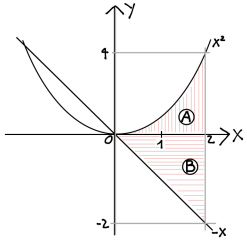
- *Fall 1* Konstante Integrationsgrenzen: (über Quader)
  $$\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$
- *Fall 2* Variable Integrationsgrenzen: (über Normalbereich)
  $$\int\limits_a^b\left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}\left(\int\limits_{\tilde{g}(y)}^{\tilde{h}(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

  Neue Integrationsgrenzen bestimmen:

  1. Integrationsgebiet aufzeichnen
  2. Neue Integrationsgrenzen „herauslesen“
  3. Neues Integral aufschreiben und lösen

*Beispiel*: $\int\limits_0^2\left(\int\limits_{-x}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

1. Integrationsgebiet aufzeichnen:




$x \in [0,2]$ $\qquad$ $y \in \left[-x, x^2\right]$

2. Neue Integrationsgrenzen:
   Teilintervall **A**:
   $y \in [0,4]$ $\qquad$ $x \in \left[\sqrt{y}, 2\right]$
   Teilintervall **B**:
   $y \in [-2,0]$ $\qquad$ $x \in [-y, 2]$
3. Neues Integral aufschreiben und lösen
   $$\Longrightarrow \int\limits_{-2}^{0}\left(\int\limits_{-y}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int\limits_0^4\left(\int\limits_{\sqrt{y}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

## Transformationssatz

Gegeben ist folgende Transformation
$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \vec{u} \rightarrow \vec{x} = \Phi(\vec{u})$
Seien $\tilde{B}$ und $\tilde{f}$ die Ausdrücke von B und $f$ in den Koordinaten $\vec{u}$.

Dann gilt:
$$\boxed{\int\limits_B f(\vec{x})d\mu(\vec{x}) = \int\limits_{\tilde{B}} \tilde{f}(\Phi(\vec{u})) \cdot |\det\, D\Phi(\vec{u})|d\mu(\vec{u})}$$

*Sonderfall zwei Dimensionen:* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$

$$\int\limits_B f(x,y)d\mu(x,y) = \int\limits_{\tilde{B}} \tilde{f}(\Phi(u,v)) \cdot |\det\, D\Phi(u,v)|d\mu(u,v)$$

**Achtung**

- Jacobi-Matrix von der transformation neue $\rightarrow$ alte Koordinaten
- Determinante der Jacobi-Matrix!

**Strategie**

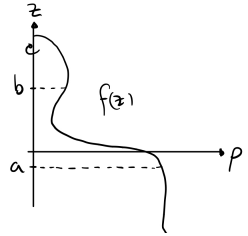
1. Bestimme Substitution $\Phi : \vec{u} \rightarrow \vec{x}$ (alte koordinaten in fkt der neue)
2. Berechnet Jacobian $D\Phi$
3. Berechne Determinante $det(D\Phi)$
4. neuen Integrationsbereich bestimmen

Tipps:

- Transformation muss bijektiv sein
- am besten lineare Transformation
- $det(D\Phi) = \frac{1}{det(D\Phi^{-1})}$

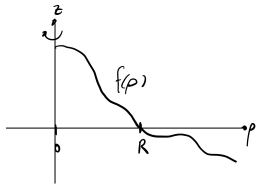
## Rotationskörper

1. Art:
Rotiere $\rho = f(z), a \leq z \leq b$ um die z-achse:




$$\mathrm{Vol}(k) = \pi\int\limits_a^b f(z)^2 dz$$

2. Art:
Rotiere $z = f(\rho), 0 < \rho < R$ um z-achse.




$$\mathrm{Vol}(K) = 2\pi\int\limits_0^R \rho f(\rho)d\rho$$

*Achtung* - nicht verwirren lassen. Je nach Aufgabe (Rotachse, Funktion, ...) kann die Formel sich leicht ändern.

## Integration anderer Koordinatensysteme

**Polarkoordinaten**
Mit der Transformation
$$\Phi : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} r \in [0,a] \\ \varphi \in [0,2\pi] \end{matrix}$$
erhalten wir das neue Integral
$$\int\limits_X\int\limits_Y f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int\limits_R\int\limits_\varphi f(r,\varphi)\underbrace{\cdot r}_{!}\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r$$
Bem. $x^2 - y^2 = \cos(\varphi)$

**Zylinderkoordinaten**
Mit der Transformation
$$\Phi : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} r \in [0,a] \\ \varphi \in [0,2\pi] \\ z \in [b,c] \end{matrix}$$
erhalten wir das neue Integral
$$\int\limits_X\int\limits_Y\int\limits_Z f(x,y,z)\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int\limits_R\int\limits_\varphi\int\limits_Z f(r,\varphi,z)\underbrace{\cdot r}_{!}\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r$$

**Kugelkoordinaten**
Mit der Transformation

$$\Phi : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} r \in [0, a] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \\ \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{matrix}$$

erhalten wir das neue Integral

$$\int_X \int_Y \int_Z f(x, y, z)\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_R \int_\varphi \int_\vartheta f(r, \varphi, \vartheta) \underbrace{\cdot r^2 \cdot \cos(\vartheta)}_{!}\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r$$

## Beispiel: Spezialfall, nur lösbar mit Substitution

Folgendes Integral lässt sich **nur mit Substitution** lösen:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\ \mathrm{d}y\right)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{Polar-}}{\underset{\text{koord.}}{=\!=\!=}} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-(r^2\cos^2(\varphi)+r^2\sin^2(\varphi))} \cdot r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \cdot r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r\ \mathrm{d}r = 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \pi$$

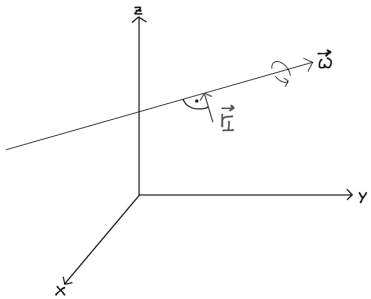
$$\Longrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}}$$

## Physikalische Grössen

**Masse**
Die Gesamtmasse $M$ eines Volumens ist
$M = \int_V \rho(x, y, z)\mathrm{d}V$ wobei $\rho(x, y, z)$ die *Massendichte* ist.

**Trägheitsmoment**
Das Trägheitsmoment $J$ mit Dichte $\rho(\vec{r})$ ist
$J = \int_V (\vec{r}_\perp)^2 \rho(\vec{r})\mathrm{d}V$

$\vec{r}_\perp$: senkrechter Anteil von $\vec{r}$ bezüglich der Rotationsachse




*Sonderfall* Rotationsachse ist $z$-Achse:
$\Longrightarrow (\vec{r}_\perp)^2 = (x^2+y^2)$ ($\to$gilt auch mit *zyklischer Vertauschung*!)

**Schwerpunkt** (Massenmittelpunkt)
Der Schwerpunkt $\vec{r}_S$ ist definiert als

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \cdot \int_V \vec{r} \cdot \rho(\vec{r})\ \mathrm{d}V \qquad \text{mit } \rho(\vec{r})\text{: Dichte an der Stelle } \vec{r}$$

Die **Arbeit eines Vektorfeldes** $V$
längs eines Weges $\gamma(t)$ auf dem Intervall $[a, b]$ ist

$$A = \int_a^b V\big(\gamma(t)\big) \cdot \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}t$$

## Cauchy-Kriterium

Das uneigentliche Integral einer *stetigen* Funktion $f$ über $X$ (Gebiet)

$$\int_X f(\vec{x})\mathrm{d}V \qquad \left(\mathrm{d}V = \mathrm{d\ vol}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

ist *absolut konvergent*, wenn

$$\int_K |f(\vec{x})|\mathrm{d}V < \infty\ .$$

Dies gilt $\forall K \subseteq X$ und $K$ muss eine kompakte und beschränkte Menge sein.

## Wegintegral / Kurvenintegral von reellwertigen Funktionen

Das Wegintegral einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entlang eines Weges, welcher durch eine Parametrisierung
$\gamma(t) \in \mathbb{R}^n \qquad t \in [a, b]$
beschrieben werden kann, ist definiert als

$$\int_\gamma f(\vec{x})\mathrm{d}s := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|\mathrm{d}t$$

wobei $\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\dot{\gamma}_1(t)^2 + \dot{\gamma}_2(t)^2 + \cdots + \dot{\gamma}_n(t)^2}$ .
*Spezialfall:* Das Längenintegral
Die Länge einer Parametrisierung ist definiert als

$$l = \int_\gamma 1\mathrm{d}s = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\mathrm{d}t$$

*Spezialfall*: **Umfang einer Ellipse**

Die **Ellipsengleichung** ist: $\boxed{C := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1\right\}}$

mit der Parametrisierung: $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \cos\varphi \\ \beta \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\gamma'(\varphi) = (-\alpha\sin\varphi, \beta\cos\varphi)$ folgt:

$$\int_C 1\ \mathrm{dvol}_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi}\ \mathrm{d}t$$

$\Longrightarrow$ Dieses Integral ist **NUR numerisch lösbar**!!!

## Flächen

Eine Fläche $S$ kann mit zwei Parametern $u$ und $v$ in folgender Form dargestellt werden

$$\vec{r} : A \to S \qquad \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(u, v) \\ r_2(u, v) \\ r_3(u, v) \end{pmatrix}$$

Falls man eine gleichung mit $x^2$ und $x$ bzw. $y^2$ und $y$ nutzt man die quadratische Ergänzung um ein verschobene Kreis zu paramerisieren.

## Parametrisierung einer Fläche

- Falls es sich um ein Schnitt von 2 Oberfläche handelt, kann man eine von beiden parametrisieren und dann auf das schnitt beschränken
- Oberfläche auf einer Ebene projizieren, die projektion parametrisieren und schlussendlich wieder in Raum bringen mit die letzte variable in abhängigkeit von die 2 anderen.

## Flächenintegral

Das Flächenintegral einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ über eine Oberfläche $S$ mit der Parametrisierung $\vec{r}(u, v)$:

$$\boxed{\iint_S f\ \mathrm{d}\omega = \int_A f(\vec{r}(u, v)) \cdot \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\ \mathrm{d}\mu(u, v)}$$

wobei $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$ der Verzerrungsfaktor der Parametrisierung ist.
und $d\omega(S) = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\ \mathrm{d}\mu(u, v)$ das skalar Oberflächenelement

*Flächeninhalt der Parametrisierung*:

$$\omega(S) = \iint_S 1\ \mathrm{d}\omega = \int_A \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\ \mathrm{d}\mu(u, v)$$

*Spezialfall*: **Fläche einer Ellipse**

$$F := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \leqslant 1\right\}$$

mit der Parametrisierung: $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha r \cdot \cos\varphi \\ \beta r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$ mit $\begin{matrix} \varphi \in [0, 2\pi] \\ r \in [0, 1] \end{matrix}$

folgt:

$$\mathrm{vol}_2(F) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} \alpha \cdot \cos\varphi \\ \beta \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\alpha r \cdot \sin\varphi \\ \beta r \cdot \cos\varphi \end{pmatrix} \right\|\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \alpha\beta r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r = \alpha\beta\pi$$

## Vektorfeld

Ein Vektorfeld ist eine vektorwertige Funktion

$$\vec{K}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} K_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ K_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ K_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

## Vektoranalysis

**Gradient der Funktion**
$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ mit f Skalarfeld,
$\nabla f$ ist ein Vektorfeld!

**Divergenz des Vektors $\vec{K}$**
$\vec{\nabla} \cdot \vec{K} = \left(\frac{\partial K_1}{\partial x_1}, \frac{\partial K_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial K_3}{\partial x_n}\right)$
Die Divergenz eines Vektorfeldes kann als Quellstärke intepretiert werden.

**Rotation des Vektors $\vec{K}$**

$$rot(\vec{K}) = \vec{\nabla} \times \vec{K} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$$

**Rotation eines Vektorfeldes**

Die Rotation eines Vektorfeldes $K(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$ ist:

$$\mathrm{rot}\Big(K(x, y, z)\Big) = \begin{pmatrix} R_y(x, y, z) - Q_z(x, y, z) \\ P_z(x, y, z) - R_x(x, y, z) \\ Q_x(x, y, z) - P_y(x, y, z) \end{pmatrix}$$

**Identitäten**

- $\mathrm{div}\big(f \cdot K\big) = \nabla f \cdot K + f \cdot \mathrm{div}\big(K\big)$
- $\mathrm{div}\big(K \times L\big) = L \cdot \mathrm{rot}\big(K\big) - K \cdot \mathrm{rot}\big(L\big)$
- $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = \mathrm{rot}\big(\nabla f\big) = 0$
- $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \Delta f$
- $\mathrm{div}\Big(\mathrm{rot}\big(K\big)\Big) = 0$
- $\mathrm{div}\Big(f \cdot \mathrm{rot}\big(K\big)\Big) = \nabla f \cdot \mathrm{rot}\big(K\big)$
- $\nabla \times (\nabla \times \vec{K}) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{K}\right) - \left(\Delta K_1, \Delta K_2, \Delta K_3\right)$

## Feldlinien eines Vektorfeldes

Die Feldlinien eines Vektorfeldes $K$ sind parametrisierte Kurven $\gamma(t)$, so dass gilt:

$$\gamma'(t) = \vec{K}(\gamma(t))$$

Sprich: Kurve $\gamma$ ist in jedem Punkt parallel zum dort angehefteten Feldvektor.

## Wegintegral / Kurvenintegral von vektorwertigen Funktionen

Für eine vektorwertige Funktion $\vec{K}(\vec{x})$ und Parametrisierung einer Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$ gilt:

$$\int_\gamma \vec{K} d\vec{x} = \int_a^b \vec{K}(\vec{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t)dt$$

2D: mit $\vec{K}(\vec{x}) = (P(x, y), Q(x, y))$

$$\int_\gamma \vec{K} d\vec{x} = \int_\gamma (Pdx + Qdy)$$

## Konservative Felder

Ein Vektorfeld heisst *konservativ*, falls für alle zwei Kurven $\gamma_1$ und $\gamma_2$ mit dem gleichen Anfangspunkt und Endpunkt gilt:

$$\int_{\gamma_1} \vec{K} d\vec{x} = \int_{\gamma_2} \vec{K} d\vec{x}$$

Feld konservativ $\iff$ geschlossene Integrale sind 0
$\iff$ alle Integrale sind wegunabhängig.
$\to$ Gradientenfelder sind immer konservativ. $\int_\gamma \nabla f d\vec{r} = f(q) - f(p)$
Wobei $\gamma$ von p nach q geht.

## Potential

*Definition*:
Es gilt folgender Zusammenhang zwischen einem Vektorfeld $\vec{K}$ und einem Potential $\Phi$:

$$\vec{K}(\vec{x}) = \mathrm{grad}(\Phi(\vec{x})) = \nabla\Phi(\vec{x})$$

Das Feld wird auch Gradientenfeld oder konservativ genannt. In solch einem ist das Kurvenintegral von $a$ nach $b$ unabhängig vom Weg. Das geschlossenen Kurvenintegral ist also 0. Für ein beliebiges Kurvenintegral von $\gamma_0$ nach $\gamma_1$ gilt: $\int_\gamma \vec{K}(\vec{x})d\vec{x} = \Phi(\gamma_1) - \Phi(\gamma_0)$

**Existenz eines Potentials:**
Ein $C^1$-Vektorfeld $\vec{K}(x, y) = (P, Q)$ (bzw. eine 1-Form $Pdx + Qdy$) auf einem *einfach zusammenhängenden* Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann ein Potentialfeld $\nabla f$, wenn gilt:

$$Q_x - P_y \equiv 0$$

Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und ein $C^1$-Vektorfeld $\vec{K}$ existiert ein Potential falls:

$$\mathrm{rot}\vec{K} \equiv 0 \ (\vec{K} \text{ ist wirbelfrei})$$

*Zweidimensionales Vektorfeld*:
Für die Existenz eines Potentials muss gelten:

$$\vec{K}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} \qquad P_y = Q_x$$

*Dreidimensionales Vektorfeld*:
Es gilt für die Existenz

$$\vec{K}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} P_z = R_x \\ R_y = Q_z \\ Q_x = P_y \end{matrix}$$

*Bestimmung des Potentials in $\mathbb{R}^2$*:
Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{K}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} \qquad P_y = Q_x$$

Vorgehensweise:
Variante 1:

1. $\int P(x, y)dx = f(x, y) + c_1(y)$
2. $\int Q(x, y)dy = f(x, y) + c_2(x)$
3. Bestimme $c_1$ oder $c_2$ mittels $f(x, y) + c_1(y) = f(x, y) + c_2(x)$
4. Falls Lösung existiert ist $f(x, y) + c_1(y)$ oder $f(x, y) + c_2(x)$ das Potential.

Variante 2:

1. Satz aus der Vorlesung: K ist konservativ $\Rightarrow f(p) := \int_\gamma K dr$
2. Sei $\gamma$ den Weg von $P_0 = (0, 0)$ nach ein beliebige $P = (x, y)$
3. $\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} t \cdot x \\ t \cdot y \end{pmatrix}$ $t \in [0, 1]$
4. $f(p) := \int_0^1 K(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt$ berechnen.

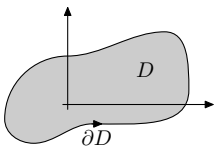
(Wobei $c$ eine Konstante und bei $\int$ die Stammfunktion gesucht ist.)

## Integralsatz: Satz von Green in $\mathbb{R}^2$ Satz von Stokes

*Aussage*
Gegeben sei ein Vektorfeld

$$K(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$

auf einem kompletten Bereich $D$ mit geschlossenem Rand $\partial D$ (positive Umlaufrichtung).




Es gilt:

$$\boxed{\oint_{\partial D} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} d\vec{x} = \oint_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \iint_D (Q_x - P_y) d\mu(x,y)}$$

wobei für das Linienintegral mit der Parametrisierung

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$ gilt:

$$\oint_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \int_a^b \begin{pmatrix} f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\ g(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

(Auf der rechten Gleichungsseite kennzeichnet „·“ das Skalarprodukt!)

*Anwendung*

1. Flächenberechnung von $D$:
   - 1. Möglichkeit:
     $\vec{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \implies A(D) = \iint_D 1 \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = \oint_{\partial D} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$
   - 2. Möglichkeit:
     $\vec{K} = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix} \implies A(D) = \iint_D 1 \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = \oint_{\partial D} \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$
   - 3. Möglichkeit:
     $\vec{K} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \implies A(D) = \iint_D 1 \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$
2. Flächenschwerpunkt $S$:
   - Schwerpunktkoordinate $x_S$:
     $K(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix}$
     $\implies x_S = \frac{1}{A(D)} \cdot \iint_D x \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = \frac{1}{2A(D)} \cdot \oint_{\partial D} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$
   - Schwerpunktkoordinate $y_S$:
     $K(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$
     $\implies y_S = \frac{1}{A(D)} \cdot \iint_D y \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = \frac{1}{2A(D)} \cdot \oint_{\partial D} \begin{pmatrix} -y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$

## Flussintegrale über ein Weg

$$\boxed{\Phi = \int_\gamma \underline{v} \cdot \underline{n} ds = \int_a^b \underline{v}(\gamma(t)) \cdot \underline{n}(\gamma(t)) \cdot ||\dot{\gamma}(t)|| dt}$$

Z.B. in 2D mit der Parametrisierung

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$ $\quad t \in [a,b]$ $\quad$ gilt:

$$\oint_{\partial D} \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} \cdot \vec{n} ds = \int_a^b \begin{pmatrix} P(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\ Q(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\ n_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{pmatrix} \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| \ \mathrm{d}t$$

mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_2'(t) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ wobei sich der Betrag wieder wegkürzt.

1. Parametrisation von Kurve und ableitung berechnen
2. Finde die normal zur Kurve
3. Flussintegrale berechnen

## Oberflächenintegrale

Fluss eines Vektorfeldes durch eine (parametrisierte) Fläche.

Sei $r(\vec{u,v})$ eine Parametrisierung einer Fläche in $\mathbb{R}^3$ $(u,v) \to (x,y,z)$

Dann ist der gerichtete Normaleneimheitsvektor $\boxed{\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}}$

und das Vektorielle Flächenelement $\boxed{d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS = \vec{r}_u \times \vec{r}_v d\mu(u,v)}$

Damit wird das Integral des Flusses des Vektorfeld $\vec{K}$ zu:

$$\iint \vec{K} d\vec{S} = \iint \vec{K} \vec{n} dS = \iint \vec{K}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) d\mu(u,v)$$

**Achtung** Aufpassen, in welche Richtung das Flächenelement zeigt, je nach dem welche Fluss positiv gezählt werden soll.

<u>Strategie:</u>

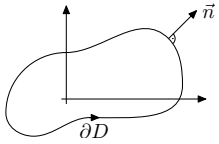
1. Bestimme Parametrisierung $\vec{\Phi}(u,v)$
2. Berechne partielle Ableitungen $\vec{\Phi}_u$ und $\vec{\Phi}_v$
3. Berechne Kreuzprodukt $\vec{\Phi}_u \times \vec{\Phi}_v = d\vec{S}$
4. Wenn skalares Flächenelement $dS$ gefragt ist, nimm Absolutbetrag
5. einsetzen, Skalarprodukt ausrechnen und Integral berechnen.

## Integralsatz: Satz von Gauss in $\mathbb{R}^2$ / Divergenzsatz

*Aussage*
Gegeben sei das Vektorfeld

$$K(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$

auf einer kompakten (abgeschlossen & beschränkt) Ebene $D$ mit geschlossenem Rand $\partial D$.




(Wobei $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1(x,y) \\ n_2(x,y) \end{pmatrix}$ ein Vektor der Länge 1 ist, der überall rechtwinklig auf dem Rand $\partial D$ steht.)

Es gilt für den Fluss:

$$\boxed{\oint_{\partial D} \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1(x,y) \\ n_2(x,y) \end{pmatrix} ds = \iint_D (P_x(x,y) + Q_y(x,y)) \, d\mu(x,y)}$$

$$\oint_{\partial D} \vec{K} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \operatorname{div} \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} d\mu(x,y)$$

## Laplace-Operator

Der Laplace Operator für die $C^2$ Funktion von $n$ Raumvariablen ist:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2} = \operatorname{div}(\nabla u)$$

## Integralsatz: Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$ (in 3 Dimensionen!)

*Aussage*
Gegeben sei das Vektorfeld

$$K(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$$

auf einer kompakten **Fläche** $D$ mit Rand $\partial D$ (positive Umlaufrichtung).
Dann gilt für die Zirkulation

$$\boxed{\oint_{\partial D} \vec{K} dr = \iint_D \operatorname{rot}\left(\vec{K}\right) \cdot \vec{n} d\omega}$$

mit $\vec{n} d\omega = d\vec{\omega}$

Es gilt:

1. Berechnung des Oberflächenintegrals mit der Parametrisierung

$$r(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(u,v) \\ r_2(u,v) \\ r_3(u,v) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } u \in [a,b] \text{ und } v \in [c,d]$$

$$\Longrightarrow \iint_D \operatorname{rot}\left(\vec{K}\right) \cdot \vec{n} d\omega = \int_a^b \int_c^d \operatorname{rot}\left(\vec{K}\left(r(u,v)\right)\right) \cdot (r_u \times r_v) \ \mathrm{d}v \ \mathrm{d}u$$

mit $\vec{n} = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$

2. Berechnung des Linienintegrals

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \in [a,b]$$

$$\oint_{\partial D} \vec{K} dr = \int_a^b \vec{K}\left(\gamma(t)\right) \cdot \dot{\gamma}(t) \ \mathrm{d}t$$

## Integralsatz: Satz von Gauss in $\mathbb{R}^3$ / Divergenzsatz

*Aussage*
Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{K}(x,y,z)$ auf einem kompakten **Volumen** $D$ mit Oberfläche $\partial D$. Es gilt für den Fluss

$$\boxed{\oiint_{\partial D} \vec{K}(x,y,z) \cdot \vec{n} d\omega = \iiint_D \operatorname{div}\left(\vec{K}(x,y,z)\right) d\mu(x,y,z)}$$

mit $\vec{n} d\omega = d\vec{\omega}$

Beachte, dass $\vec{n}$ in die Richtung des Flusses zeigen muss, respektive muss die Orientierung von $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$ angepasst werden.
Für das Oberflächenintegral $\rightarrow$ *siehe Satz von Stokes.*

# Anhang

## Sonstige Integrale

| | | |
|---|---|---|
| $\int f(x)dx$ | $=$ | $F(x) + c$ |
| $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$ | $=$ | $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \log(\sqrt{a^2+x^2}+x)\right) + c$ |
| $\int \arctan(x)dx$ | $=$ | $x \arctan(x) - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c$ |
| $\int \sinh^2(x)dx$ | $=$ | $\frac{1}{4}(\sinh(2x) - 2x) + c$ |
| $\int \tanh^2(x)dx$ | $=$ | $x - \tanh(x) + c$ |
| $\int x\sin(x)dx$ | $=$ | $\sin(x) - x\cos(x) + c$ |
| $\int x^2\sin(x)dx$ | $=$ | $2x\sin(x) - (x^2-2)\cos(x) + c$ |
| $\int x^3\sin(x)dx$ | $=$ | $3(x^2-2)\sin(x) - x(x^2-6)\cos(x) + c$ |
| $\int x^4\sin(x)dx$ | $=$ | $4x(x^2-6)\sin(x) - (x^4-12x^2+24)\cos(x)$ |
| $\int x\cos(x)dx$ | $=$ | $x\sin(x) + \cos(x) + c$ |
| $\int x^2\cos(x)dx$ | $=$ | $(x^2-2)\sin(x) + 2x\cos(x) + c$ |
| $\int x^3\cos(x)dx$ | $=$ | $x(x^2-6)\sin(x) + 3(x^2-2)\cos(x) + c$ |
| $\int x^4\cos(x)dx$ | $=$ | $4x(x^2-6)\cos(x) + (x^4-12x^2+24)\sin(x)$ |
| $\int \sin(ax)\sin(bx)dx$ | $=$ | $\frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + C$ |
| $\int \sin(ax)\cos(bx)dx$ | $=$ | $-\frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a-b)} + C$ |
| $\int x\sin(\alpha x)dx$ | $=$ | $\frac{\sin(\alpha x) - \alpha x\cos(\alpha x)}{\alpha^2} + C$ |
| $\int x^2\sin(\alpha x)dx$ | $=$ | $\frac{(2-\alpha^2x^2)\cos(\alpha x) + 2\alpha x\sin(\alpha x)}{\alpha^3} + C$ |
| $\int x^3\sin(\alpha x)dx$ | $=$ | $\frac{3(\alpha^2x^2-2)\sin(\alpha x) - \alpha x(\alpha^2x^2-6)\cos(\alpha x)}{\alpha^4} + C$ |
| $\int x\cos(\alpha x)dx$ | $=$ | $\frac{\alpha x\sin(\alpha x) + \cos(\alpha x)}{\alpha^2} + C$ |
| $\int x^2\cos(\alpha x)dx$ | $=$ | $\frac{(\alpha^2x^2-2)\sin(\alpha x) + 2\alpha x\cos(\alpha x)}{\alpha^3} + C$ |
| $\int x^3\cos(\alpha x)dx$ | $=$ | $\frac{\alpha x(\alpha^2x^2-6)\sin(\alpha x) + 3(\alpha^2x^2-2)\cos(\alpha x)}{\alpha^4} + C$ |
| $\int xe^{\alpha x}dx$ | $=$ | $\frac{e^{\alpha x}(\alpha x-1)}{\alpha^2} + C$ |
| $\int x^2e^{\alpha x}dx$ | $=$ | $\frac{e^{\alpha x}(\alpha^2x^2-2\alpha x+2)}{\alpha^3} + C$ |
| $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ | $=$ | $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$ für $\Re(\alpha) > 0$ |

## Trigonometrie

- $\sin(x \pm y) = \sin x \ \cos y \pm \sin y \ \cos x$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \ \mp \sin x \sin y$
- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
- $\cos 2x = cos^2(x) - sin^2(x) = 1 - 2\,sin^2(x) = 2cos^2(x) - 1$
- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = \sin x\,(4\cos^2 x - 1)$
- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
- $\sin 4x = 8\sin x\cos^3 x - 4\ \sin x\cos x$
- $\cos 4x \ = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$
- $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$
- $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$
- $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin\,(2x)$
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- -$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$
- $\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)$
- -$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- -$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos(3x))$
- -$\cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + 4\cos(2x) + \cos(4x))$

- $e^x = \cosh(x) + isinh(x)$
- $1 = \cosh^2(x) - \sinh^2(x)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sinh(\pm ix) = \pm i\sin(x)$
- $\cosh(ix) = \cos\,(x)$

## Reihen

- $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} (k\ gerade) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$
- $\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} (k\ ung.) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$
- $\cos x = Re(e^{ix}) = Re \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} Re \frac{i^k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m} x^{2m}}{(2m)!}$
- $analog: \sin x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$
- $\tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{n+1} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$
- $\operatorname{arctanh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ ; $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$
- $beachte: i^k = 1\ wenn\ k\ durch\ 4\ teilbar$
  $i^k = -1\ wenn \frac{k}{4} Rest\ 2\ ergibt \rightarrow$
  $\pm i\ sonst$
- $\rightarrow i^2 = -1 = (i)^{2m} = (i^2)^m = (-1)^m;$
  Wichtig: $\cosh(\pm ix) = \cos(x);$
  $\sinh(\pm ix) = \pm i \sin(x)$
- $y \in \mathbb{R}: arsinh\ y = \log\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$
  $arcosh\ y = \log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \leftarrow$
  $y \geq 1$
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$
- $\lim_{x \to \infty} \tanh x = 1$
- $\operatorname{arctanh} y = \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right)\ für\ (-1 < y < 1)$

- Useful: $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$; $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

- $\cos(z + h) = \cosh(iz + ih) = \cosh(iz)\cosh(ih) + \sinh(iz)\sinh(ih) = \cos(z)\cos(h) + i\sin(z) i\sin(h) = \cos(z)\cos(h) - \sin(z)\sin(h)$

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z}{c}\right)^d} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{c}\right)^{d \cdot k} \iff \left|\frac{z}{c}\right| < 1 \qquad \text{mit } \rho = 1$$

$$\frac{1}{c\left(1 - \frac{z}{c}\right)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{c} \left(\frac{z}{c}\right)^{k-1} \iff \left|\frac{z}{c}\right| < 1 \qquad \text{mit } \rho = c$$

*Wichtige Umformung für geom. Reihe:*

$$\frac{1}{2 - z} = \frac{1}{2 - z + 1 - 1} = \frac{1}{1 - (z - 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (z - 1)^k \text{ für } |z - 1| < 1$$

$$e^z = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} \qquad \text{mit } \rho = \infty$$

$$(1 + x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1) x^k \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1 - x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} x^k \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$\sqrt{1 + x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\ldots(\frac{3}{2} - k)}{k!} x^k \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(z_0) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (z - z_0)^k}{k \cdot {z_0}^k} \qquad \text{für } \forall |z - z_0| < |z_0|$$

$$\operatorname{Log}(z + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots \qquad \text{für } |z| < 1$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2k + 1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5400} \pm \ldots$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} \pm \ldots$$

$$\tan(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \ldots \qquad \text{für } |x| < \pi/2$$

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n + 1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots$$

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1} \qquad \text{für } |x| \leq 1$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - arcsin(x) \qquad \text{für } |x| \leq 1$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad \text{für } |x| < 1$$

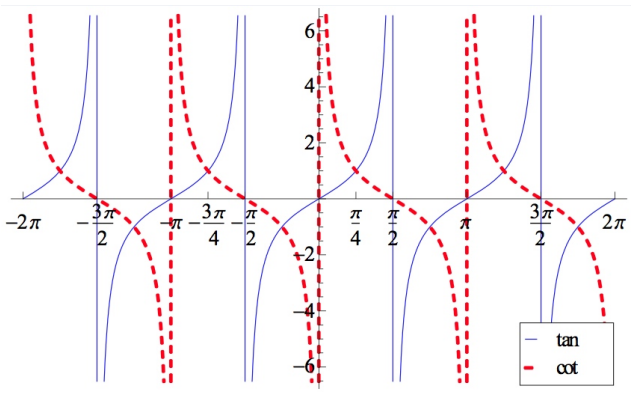
$$e^{iz} = \exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z) = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2} + \frac{(iz)^3}{6} + \frac{(iz)^4}{24} + \ldots$$

$$= 1 + iz - \frac{z^2}{2} - \frac{iz^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{iz^5}{120} \mp \ldots$$

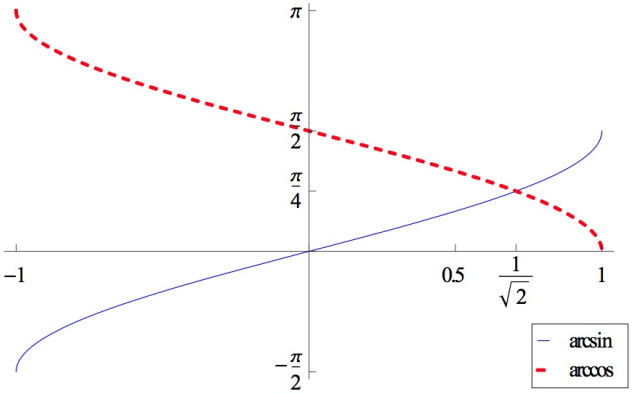
$$= 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} \mp \cdots + i\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} \mp \ldots\right)$$

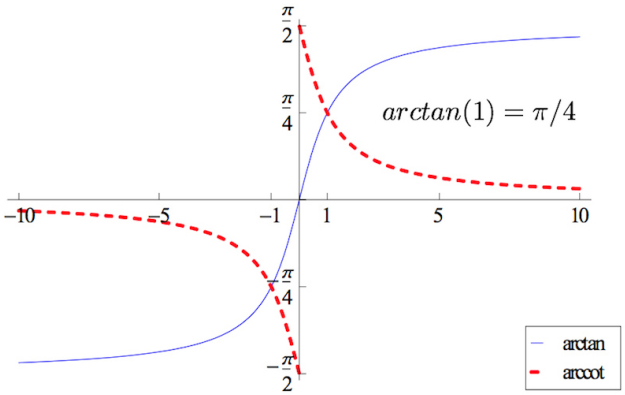
# Wichtige Plots

### tan, cot

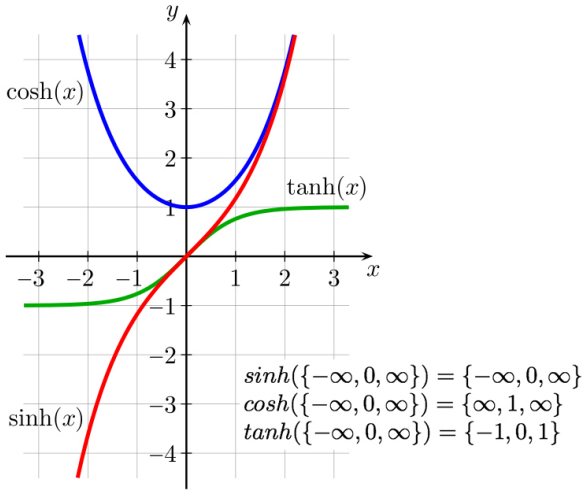



### arcsin, arccos, arctan, arccot

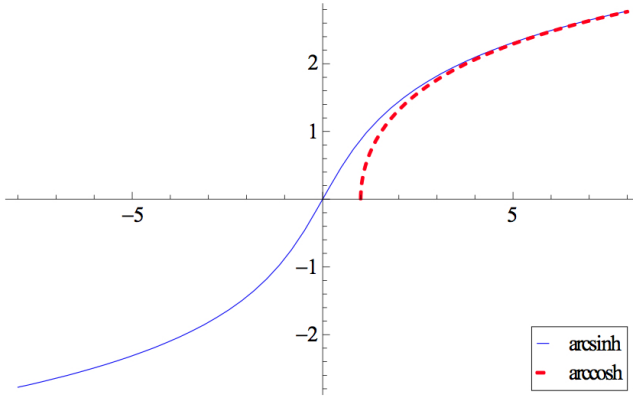


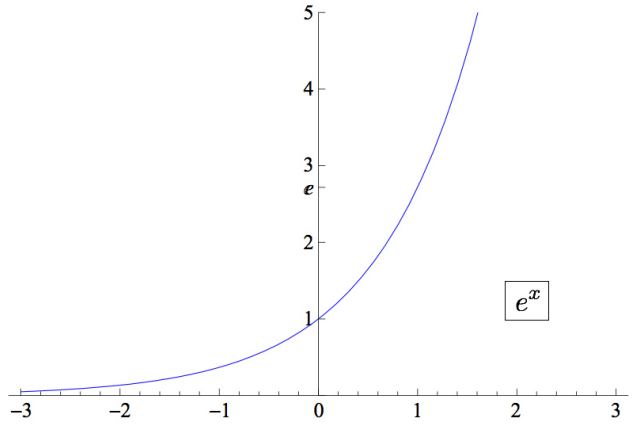

### sinh, cosh, tanh



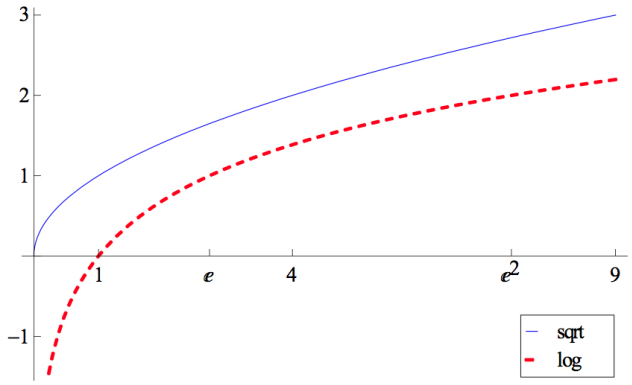

### arcsinh, arccosh




### exp




### sqrt, log



| | | |
|---|---|---|
| $\int x^z\,dx$ | $\frac{1}{z+1}\cdot x^{z+1}+c$ | $x\in\,]0,\infty[,\quad z\in\mathbb{C}, z\neq -1$ |
| $\int \frac{1}{x-a}\,dx$ | $\ln(\lvert x-a\rvert)+c$ | $x\in\,]-\infty,\infty[\setminus 0$ |
| $\int e^{\lambda x}\,dx$ | $\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}+c$ | $\lambda\in\mathbb{C}, \lambda\neq 0$ |
| $\int \ln(x)\,dx$ | $x\ln(x)-x+c$ | $x\in\,]0,\infty[$ |
| $\int \sin(x)\,dx$ | $-\cos(x)+c$ | $x\in\,]-\infty,\infty[$ |
| $\int \cos(x)\,dx$ | $\sin(x)+c$ | $x\in\,]-\infty,\infty[$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ | $\arcsin(x)+c$ | $x\in\,]-1,1[$ |
| $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ | $\arccos(x)+c$ | $x\in\,]-1,1[$ |
| $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ | $\arctan(x)+c$ | $x\in\,]-\infty,\infty[$ |
| $\int \sinh(x)\,dx$ | $\cosh(x)+c$ | $x\in\,]-\infty,\infty[$ |
| $\int \cosh(x)\,dx$ | $\sinh(x)+c$ | $x\in\,]-\infty,\infty[$ |
| $\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx$ | $\tanh(x)+c$ | $x\in\,]-\infty,\infty[$ |
| $\int \tanh(x)\,dx$ | $\ln(\cosh(x))+c$ | $x\in\,]-\infty,\infty[$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ | $\sinh^{-1}(x)+c$ | $x\in\,]-\infty,\infty[$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ | $\cosh^{-1}(x)+c$ | $x>1$ |
| $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$ | $\tanh^{-1}(x)+c$ | $x\in\,]-1,1[$ |
| $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$ | $\tanh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)+c$ | $x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,\infty[$ |
| $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$ | $\frac{1}{2}\ln\left(\left\lvert\frac{x+1}{x-1}\right\rvert\right)+c$ | $-1<x<1$ |
| $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$ | $\tan(x)+c$ | $x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right[$ |
| $\int \tan(x)\,dx$ | $-\ln\lvert\cos(x)\rvert+c$ | $x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right[$ |
| $\int \sin^2(x)\,dx$ | $\frac{x}{2}-\frac{\sin(x)\cos(x)}{2}$ | |
| $\int \frac{1}{\tan(x)}dx$ | $\log(\sin(x))$ | |
| $\int \arcsin(x)\,dx$ | $\sqrt{1-x^2}+x\arcsin(x)$ | |
| $\int \operatorname{arcsinh}(x)\,dx$ | $x\operatorname{arcsinh}(x)$ | |
| $\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}$ | $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)+c$ | |
| $\int \frac{1}{\sin(x)}dx$ | $-\ln\left(\frac{1}{\tan(x)}+\frac{1}{\sin(x)}\right)+c$ | |
| $\int \frac{1}{\sinh(x)}dx$ | $\log\left(2\sinh\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\log\left(2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ | |
| $\int \frac{1}{\sin(x)}dx$ | $\log\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\log\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ | |
| $\int \sqrt{x}\,dx$ | $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$ | |
| $\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ | $-2\sqrt{1-x}+c$ | |
| $\int \frac{1}{\cos(x)}dx$ | $\log\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\log\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ | |
| $\int dx$ | $x+c$ | |
| $\int 0\,dx$ | $c$ | |
| $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ | $\ln\lvert f(t)\rvert+c$ | $f(t)\neq 0$ |
| $\int u'v+uv'$ | $uv+c$ | |
| $\int 2\sin(x)\cos(x)$ | $\sin^2(x)+c_1=-\frac{1}{2}\cos(2x)+c_2$ | |
| $\int \sin^3(x)$ | $-\frac{2}{3}\cos(x)+c$ | |
| $\int nx\sin(x)$ | $-nx\cos(x)+n\sin(x)+c$ | |
| $\int \frac{1}{\sin^2(x)}$ | $-\frac{1}{\tan(x)}+c$ | |
| $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ | $\log(\lvert f(x)\rvert)+c$ | |
| $\int \frac{1}{(x-a)^2+1}dx$ | $-\arctan(x-a)$ | |
| $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$ | $\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ | |
| $\int \frac{1}{x+a}dx$ | $\log\lvert x+a\rvert+c$ | Für Partialbruch-zerlegung |
| $\int \frac{1}{(x+a)^n}dx$ | $\frac{-1}{(n-1)(x+a)^{n-1}}$ $\quad n\geq 2$ | |
| $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}dx$ | $\frac{\log\left\lvert\frac{b+x}{a+x}\right\rvert}{a-b}+c$ | |
| $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ | $\arctan(x)+c$ | |

| | |
|---|---|
| $c$ | $0$ |
| $x^\alpha$ | $\alpha\cdot x^{\alpha-1},\quad x>0, \alpha\in\mathbb{R}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $e^z$ | $e^z,\quad z\in\mathbb{C}$ |
| $a^x$ | $\ln(a)\,a^x$ |
| $\ln(x)$ | $\frac{1}{x}$ |
| $(\log(f(x)))'$ | $\frac{f'(x)}{f(x)}$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ |
| $\tan(x)$ | $1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=\frac{1}{1-\sin^2(x)}$ |
| $\cot(x)$ | $-\frac{1}{\sin^2(x)}$ |
| $\arcsin(x)$ | $\frac{1}{\cos(\arcsin(x))}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos(x)$ | $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\operatorname{arccot}(x)$ | $\frac{-1}{1+x^2}$ |
| $x^x$ | $x^x(\log(x)+1)$ |
| $\log_a(x)$ | $\frac{1}{\ln(a)\cdot x}$ |
| $\cosh(x)$ | $\sinh(x)$ |
| $\sinh(x)$ | $\cosh(x)$ |
| $\operatorname{arcosh}(x)$ | $\frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh}(x))}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| $\operatorname{arsinh}(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $\tanh(x)$ | $\frac{1}{\cosh^2(x)}=1-\tanh^2(x)$ |
| $\operatorname{artanh}(x)$ | $\frac{1}{1-x^2}$ |

## Mehr Integrale:

- $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+c$
- $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+c$
- $\int (ax^p+b)^s x^{p-1}dx = \frac{(ax^p+b)^{s+1}}{ap(s+1)}+c$
- $\int (ax^p+b)^{-1}x^{p-1}dx = \frac{1}{ap}\ln\lvert ax^p+b\rvert+c$
- $\int x^s\ln x\,dx = \frac{x^{s+1}}{s+1}\left(\ln x-\frac{1}{s+1}\right)+c, x>0$
- $\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2+c$
- $\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(x-\sin(x)\cos(x))+c$
- $\int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(x+\sin(x)\cos(x))+c$
- $\int \tan^2(x)\,dx = \tan(x)-x+c$
- $\int \cot^2(x)\,dx = -\cot(x)-x+c$
- $\int \frac{1}{\sin(x)}dx = \ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert+c$
- $\int \frac{1}{\cos(x)}dx = \ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert+c$
- $\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx+c$
- $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx+c$