

Übung 8 Kom A

Jean Mégret, 21.04.2020

Nachbesprechung:

Aufgabe 3: Man muss seine Intuition entwickeln für die Bestimmung isolierter Singularitäten. Leider kein striktes Rezept. Ich würde aber auf jeden Fall, die verschiedenen Fälle auf der Zusammenfassung schreiben.

Aufgabe 4: $\text{Res}(f, z_1) = 0$ heißt nicht z_1 ist eine hebbare Singularität, es heißt einfach $c_{-1} = 0$, aber sagt nichts über $c_{-2}, c_{-3}, \dots$

iv) Ziel der Aufgabe: Residuum von $f(z) = \frac{\cot(z)}{z^4}$ an jede Singularität berechnen.

↳ Was sind die Singularitäten von $f(z)$?

$$f(z) = \frac{\cot(z)}{z^4} = \frac{\cos(z)}{z^4 \sin(z)}, \text{ Nenner ist gleich Null wenn } z_1 = 0 \text{ oder } \sin(z_k) = 0 \text{ bzw. } z_k = k\pi$$

Für $z_1 = 0$, wir kennen die Maclaurinentwicklung von $\cot(z)$!

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^4} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - O(z^7) \right) = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3} \frac{1}{z^3} - \frac{1}{45} \frac{1}{z} - \frac{2}{945}z - O(z^3)$$

$\uparrow$
 $c_n = 0 \forall n \leq -5 \quad c_{-1} \rightarrow \text{Res}(f, 0) = -\frac{1}{45}$
↳ Polstelle 5-ter Ordnung

Für $z_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, man vermutet, dass es eine Polstelle 1-ter Ordnung ist...

$$\begin{aligned} \text{und verifizieren es: } \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) \frac{\cos(z)}{z^4 \sin(z)} &= \frac{\cos(\pi k)}{\pi^4 k^4} \lim_{z \rightarrow \pi k} \frac{z - \pi k}{\sin(z)} \stackrel{\text{Bernoulli}}{=} \frac{(-1)^k}{\pi^4 k^4} \lim_{z \rightarrow \pi k} \frac{1}{\cos(z)} \\ &= \frac{(-1)^k}{\pi^4 k^4} \frac{1}{\cos(\pi k)} = \frac{1}{\pi^4 k^4} \end{aligned}$$

Da der Grenzwert existiert und ungleich Null ist, ist es tatsächlich eine Polstelle 1-ter Ordnung! Glücklicherweise $\lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z) = \text{Res}(f, z_k)$ für Pol 1-ter Ordnung.

$$\text{Also: } \text{Res}(f, z_k) = \begin{cases} -\frac{1}{45} & \text{für } n=0 \\ \frac{1}{(\pi k)^4} & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 5: Keine Angst vor Beweisaufgaben! (auch wenn es schwierig steht ;))

Hier ist ein alternative Lösungsweg zu was in der Musterlösungen steht.

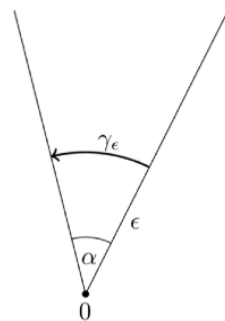
Aufgabe 5. [Schwierig] Seien $\epsilon > 0$ und $\alpha, \phi \in [0, 2\pi)$. Betrachten Sie den Weg $\gamma_\epsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, welcher durch

$$\gamma_\epsilon(t) := \epsilon \cdot e^{i(\alpha t + \phi)}$$

gegeben ist und in Abbildung 1 dargestellt ist. Sei desweiteren $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $z_0 = 0$ und $f : U \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einem Pol erster Ordnung an z_0 . Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = \alpha \cdot i \cdot \text{Res}(f; 0)$$

gilt.



$f(z) : U \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph mit einem Pol 1-ter Ordnung an $z_0 = 0$. Abbildung 1: Der Weg γ_ϵ .

Da $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge ist, wir können, nach was wir in der Vorlesung gelernt haben

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - z_0} = \frac{\varphi(z)}{z} \text{ schreiben.}$$

Desweiteren gilt $\text{Res}(f; z_0) = \varphi(z_0) \stackrel{(2)}{=} \varphi(0)$ für Polstellen 1-ter Ordnung.
 $\uparrow$ für $z_0 = 0$

Wir schreiben dann:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz &\stackrel{(1)}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\varphi(z)}{z} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{\varphi(\epsilon e^{i(\alpha t + \phi)})}{\epsilon e^{i(\alpha t + \phi)}} \cdot \underbrace{id \cdot \epsilon e^{i(\alpha t + \phi)}}_{\gamma'(t)} dt = \\ &= \int_0^1 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi(\epsilon e^{i(\alpha t + \phi)}) id dt = \int_0^1 \varphi(0) id dt = \underbrace{\varphi(0)}_{\stackrel{(2)}{=} \text{Res}(f; 0)} id \underbrace{\int_0^1 dt}_{=1} \\ &= \text{Res}(f; 0) i \alpha \end{aligned}$$

[Aufgabe 5. [Schwierig]]

Aufgabe 6: Tut mir Leid, den Hinweis war ein bisschen irreführend. Ich hatte damals:

$\int \overline{f(z)} dz = \int \overline{f(z)} dz$ geschrieben. Es war natürlich nicht präzise genug denn

$\int_0^1 \overline{f(z)} dz = \int_0^1 \overline{f(z)} dz$ geht, aber $\int \overline{f(z)} dz = \overline{\int f(z) dz}$ geht nicht immer.

$$\left(\begin{aligned} \int \overline{u+iv} dz &= \int u-iv dz = \int u dz - i \int v dz = \overline{\int u dz + i \int v dz} = \overline{\int (u+iv) dz} \\ \text{aber } \int \overline{u+iv} dz &= \int_0^1 \overline{u(\gamma(t)+iv(\gamma(t)))} \gamma'(t) dt \neq \overline{\int f(z) dz} \end{aligned} \right)$$

Theorie

Diese Woche sehen wir 4 Anwendungen des Residuensatzes ($\rightarrow$ siehe Theorie Übung 7) auf (Reelle-)Integrale die sonst relativ schwer zu berechnen sind.

I Integrale der Typus $\int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t)) dt$ oder $\int_0^1 F(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) dt$

$\rightarrow$ Hauptidee: Eine schlaue Substitution einführen damit man den Residuensatz benutzen können.

Bsp 1: S13A1; - FS 2018

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta \quad \text{für } |a| < 1 \text{ berechnen.}$$

(i) $\cos$ & $\sin$ in exp-Form schreiben

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - a(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + a^2} d\theta \quad \leftarrow \text{das sieht sehr ähnlich aus wie eine Kurvenintegral}$$

(ii) $e^{i\theta} = z$ substituieren, $\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz \Leftrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$, $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ $\theta \in [0, 2\pi)$ (Einheitskreis)

$$I = \int_{\gamma(\theta)} \frac{1}{1 - a(z + \frac{1}{z}) + a^2} \cdot \frac{1}{zi} dz$$

(iii) Umformen und Residuensatz anwenden

$$I = \int_{\gamma(\theta)} \frac{i}{-z + a^2 z + a - za^2} dz = \int_{\gamma(\theta)} \frac{i}{\underbrace{az^2 - (a^2+1)z + a}_{f(z)}} dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}(f; z_i)$$

$$\text{Polstellen: } z_{1/2} = \frac{(a^2+1) \pm \sqrt{(a^2+1)^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{a^2+1 \pm \sqrt{a^4 - 2a^2 + 1}}{2a} = \frac{a^2+1 \pm \sqrt{(a^2-1)^2}}{2a}$$

(Nullstelle in
Nenner)

$$= \frac{a^2+1 \pm (a^2-1)}{2a} = \begin{cases} z_1 = a \\ z_2 = \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{i}{\underbrace{(z-a)}_{\text{Pol 1-ter Ordnung}} \underbrace{(z-\frac{1}{a})a}_{\text{1-ter Ordnung}}}$$

$$\text{Residuen: } \text{Res}(f; a) = \varphi_1(a) = \frac{i}{(z - \frac{1}{a})a} \Big|_{z=a} = \frac{i}{a^2-1}$$

$$\text{Res}(f; \frac{1}{a}) = \varphi_2(a) = \frac{i}{(z-a)a} \Big|_{z=\frac{1}{a}} = \frac{i}{1-a^2}$$

$$\text{Da } |a| < 1: \text{ Nur } z_1 = a \text{ ist in } \gamma(\theta). \text{ Somit } I = 2\pi i \text{ Res}(f, a) = \frac{2\pi i^2}{a^2-1} = \frac{2\pi}{1-a^2}$$

II Typus

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

wobei p, q Polynome in x sind und: - $\text{Grad}(q) \geq \text{Grad}(p) + 2$

- $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (d.h. keine Singularität auf $\mathbb{R}$ -Achse)

→ Hauptidee: Die Integral in die $\mathbb{C}$ -Ebene schliessen damit man über ein geschlossenes Gebiet integrieren und wir können dann den Residuensatz anwenden!

Bsp 2: Prüfung FS 2009 - Prof. Iozzi

7. (11 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx.$$

Hinweis: Benutzen Sie zur Berechnung ein komplexes Linienintegral, das Sie in der oberen Halbebene schliessen.

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{x^4 + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{(2Rt - R)^4 + 1} 2R dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{R1}} \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

substitution

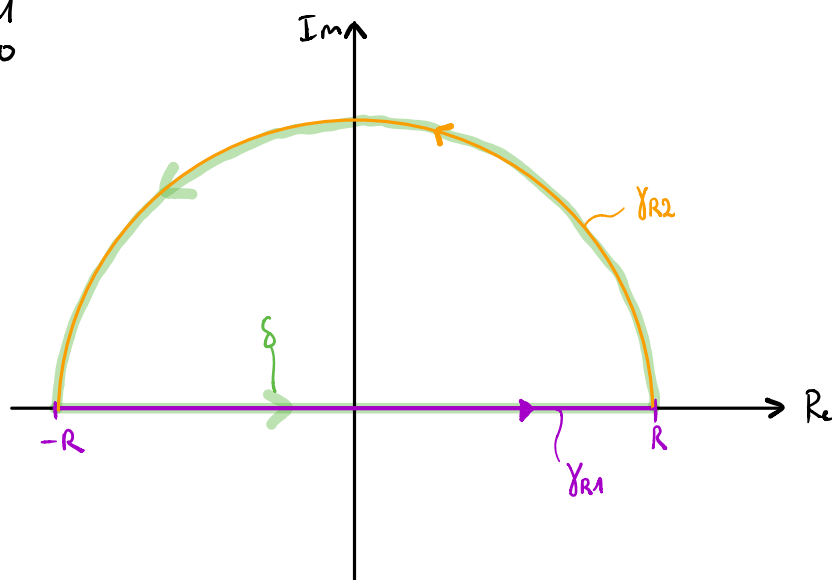
$$x = 2Rt - R, \quad dx = 2R dt$$

$$\text{obere Grenze: } t = \frac{R+R}{2R} = 1$$

$$\text{untere " : } t = \frac{-R+R}{2R} = 0$$

$$\gamma_{R1} = 2Rt - R \quad t \in [0, 1)$$

$$\gamma_{R2} = R e^{i\pi t} \quad t \in [0, 1)$$



Wenn wir $\delta = \gamma_{R1} * \gamma_{R2}$ definieren, bekommen wir ein geschlossenes Integral.

$$\int_{\gamma_{R1}} f(z) dz + \int_{\gamma_{R2}} f(z) dz = \int_{\delta} f(z) dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}(f, z_i)$$

(alle z_i die in δ sind also $\text{Im}(z_i) > 0$)

Aus der Vorlesung wissen wir nun:

wenn $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $\begin{cases} -\text{Grad } q \geq \text{Grad } p + 2 \\ -q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ dann verschwindet das Integral über γ_{R2}

Wir verifizieren es aber selber (normalerweise sollte den Argument: lemma aus der

Vorlesung mit Voraussetzungen erfüllt hinreichen)

$$\Delta\text{-ungleichung: } |a-b| \geq |a|-|b| \\ \text{bzw. } \frac{1}{|a-b|} \leq \frac{1}{|a|-|b|}$$

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{1}{(Re^{it})^4 + 1} i\pi Re^{it} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{i\pi Re^{it}}{(Re^{it})^4 + 1} \right| dt \leq \int_0^{2\pi} \frac{\pi R}{|R^4 e^{i4t} + 1|} dt \leq$$

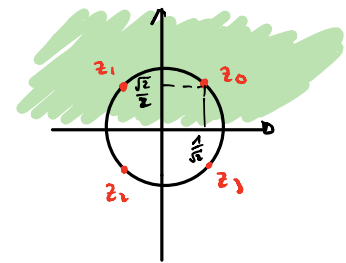
$$\leq \frac{\pi R}{R^4 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \text{also} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

Das heisst: $\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}(f, z_i)$

→ Wir müssen jetzt also nur die Residuen von alle Singularitäten von $f(z)$ die in obere halb-Ebene liegen berechnen.

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1} \quad z_k^4 = -1 = e^{\pi i t + 2\pi i k} \\ \Rightarrow z_k = e^{\frac{\pi i t}{4} + \frac{\pi i k}{2}} \quad k=0,1,2,3$$

jeweils Pol 1-te Ordnung



Nur z_0 und z_1 liegen oben!

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{1}{z^4 + 1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)}{(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)} = \frac{1}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)(z_0 - z_3)} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)(\sqrt{2}i)} = \frac{1}{2\sqrt{2}(i - 1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(-i - 1)}{2}$$

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{z^4 + 1} = \frac{1}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} = \frac{1}{(-\sqrt{2})(\sqrt{2}i)(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)} = \frac{1}{2\sqrt{2}(+i + 1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(1 - i)}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} ((-i - 1) + (1 - i)) \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Bemerkungen: - Wenn ein Integral nur über $\int_0^{\infty}$ geht, schauen ob die Funktion gerade ist. Wenn ja, dann: $\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$
↳ bekannte Form

- Es gibt andere Möglichkeiten das Weg zu schließen (S8A3b z.B.), dann muss man auf das Windungszahl achten und wie die Verschiedenen Teile des Integrals sich für $R \rightarrow \infty$ verhalten.

III Typus Fourierintegrale $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(xt) dt$ und $B = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(xt) dt$, $x \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{g(x)}{p(x)}$ wie in II

→ Hauptidee: Betrachte stattdessen $E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iat} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos(xt) + i \sin(xt)) dt = A + iB$
 $\rightarrow A = \operatorname{Re}(E)$, $B = \operatorname{Im}(E)$

Benutze was wir in II gemacht haben, aber e^{iat} ist noch zu betrachten
 Leider gibt es nicht genug Zeit um ein Beispiel anzuschauen, aber wir schauen uns in die späteren Wochen, da es ist eine der wichtigsten Werkzeug für Fourierreihen ist.

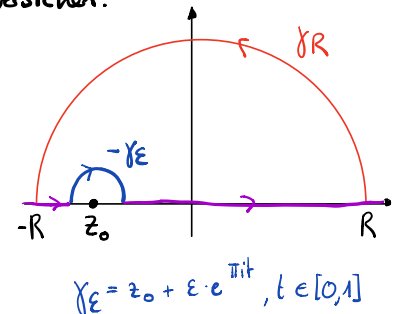
IV Typus $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ wobei $f(x)$ nur einen Pol auf den $\mathbb{R}$ -Achse hat.

→ Hauptidee: Ein bisschen wie in II, aber man schließt den Weg ein bisschen anders.

Kommt nicht in die Serie aber es ist wichtig die Idee zu verstehen:

Wir zerlegen das geschlossene Weg in 4 Stück (Farben).

$$\int_{-R}^{z_0-\epsilon} f(z) dz + \int_{-R\epsilon}^{-R} f(z) dz + \int_{z_0+\epsilon}^R f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f, z_i)$$



Da es keine Singularität in das geschlossene Weg gibt, ist die rechte Seite gleich 0.

Wie in II können wir zeigen $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$.

In der Vorlesung würde es gezeigt (und STAS), dass $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\gamma_\epsilon} f(z) dz = -\pi i \operatorname{Res}(f, z_0)$

$$\Rightarrow I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \pi i \operatorname{Res}(f, z_0)$$

Vorbesprechung / Tipps

Lange Serie, mit viel Schreibaarbeit. Aber es lohnt sich, da es kommt immer mind. ein Aufgabe von dieser Thema an der Prüfung, und solche Aufgaben müssen viel trainiert werden, bis man es gut kann.

Alle] - Alles klar schreiben und begründen

- Skizze

1] Beispiele von Übungsstunde 7 anschauen

2] i) alle 4 Wegstücke vom Quadrat separat berechnen (Übungsstunde 4)

ii) Welche Singularität-en ist/sind im Quadrat?

3] a) Beispiel für **II** anschauen und Bemerkungen!

i)

ii) Wie in **III** beschrieben vorgehen.

b) Geschlossene Kurve zerlegen und alle 3 Wegstücke separat anschauen. Wie verhalten sich die jeweiligen Integrale? (verschwinden? gleich ein andere Integral mit ein Faktor?)

4] a) S7A4 (haben wir oben nochmals angeschaut)

b) Zu zeigen ist: Auf ∂Q_N gilt $|f(z)| \leq A$ (f ist beschränkt durch A , welche unabhängig von N ist)

Also für jede Seite des Quadrats z mit alle Punkte auf die Seite ersetzen (mit ein parameter t , z.B. rechte Seite des Quadrats ist: $z = (N + \frac{1}{2}) + it$, $t \in [-(N + \frac{1}{2}), (N + \frac{1}{2})]$)

Dann mit Abschätzungen, das kleinste A der alle Seite beschränkt wählen

c) [Schwierig] Mithilfe von b), $\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^2} dz \right|$ abschätzen. (Integral über ein Weg ist kleiner als die Länge des Weges mal das grösste Wert des Weges)

Für die 2. Teil: Residuensatz anwenden, dann Residuen berechnen (einmal für $z_k = k$, $k \neq 0$)
(einmal für $z_0 = 0$)

5] **II**