

Übung 7 KomA

Jean Mégret 6-7.04.2020

Infos

Falls es immer noch nicht klar ist, bitte 2-3 Aufgaben markieren für Korrektur. Sonst wähle ich 2 Aufgaben zufällig

Nachbesprechung

Machen wir am Ende der Übung.

Kahoot: Bitte auf kahoot.it auf einem anderen Gerät in dem Browser eingeben.

Theorie

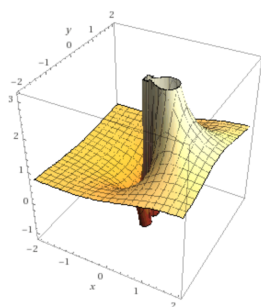
Singularitäten (folge)

Wie sehen Singularitäten aus?

Das Unterschied zwischen Polstellen und hebbare Singularitäten kann sich aus einem Plot leicht verstehen lassen: (ich habe nur die Realteil von f geplottet also $f = u + iv$ das)

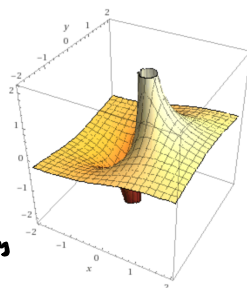
wesentliche Singularität

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$



Polstelle der Ordnung 1

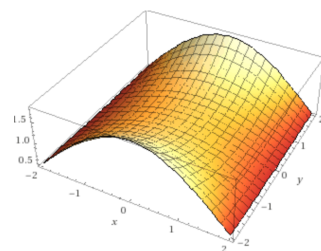
$$f(z) = \frac{1}{z}$$



← ziemlich ähnlich
da
wesentlich $\sim$ Pol ∞ -Ordnung
↑
(sehr ungenaue
Begründung)

Hebbare Singularität

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$



Obwohl es ist sehr schön die Singularitäten durch ihren Laurentreihe zu untersuchen, gibt es manche Shortcuts um schneller den Art von Singularität zu bestimmen. Wir sehen jetzt ein Paar:

I) Sei z_0 ein Polstelle der Ordnung m von $f(z)$.

$\iff$

Es existiert ein $\varphi(z)$ holomorph mit $\varphi(z_0) \neq 0$ sodass man $f(z)$ als:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} \text{ schreiben kann.}$$

↳ Das musst ihr in Aufgabe 1 zeigen, einerseits: a) Polstelle Ordnung $m \iff \exists \varphi(z)$ s.d.: $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$

andererseits: b) Polstelle Ordnung $m \Rightarrow \exists \varphi(z)$ s.d.: $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$

Bsp 1 (von letzte Woche): $f(z) = \frac{1-z^2}{z-2}$ kann man als $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^1}$ mit $z_0=2$, $\varphi = 1-z^2$

holomorph in einer klein Umgebung von z_0 , wobei $\varphi(z_0=2) = -3 \neq 0$.

D.h. $z_0=2$ ist ein Pol der Ordnung 1

II) Grenzwerte bestimmen: Aus die Plots von oben sollte es klar sein, dass eine Singularität z_0 :

- ist ein hebbare Singularität falls: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existiert (Vergleich mit Übung 2: Grenzwerte in $\mathbb{C}$)
- ist ein Pol m-ter Ordnung falls: $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$ existiert und $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z)$ existiert nicht für $n < m$

↳ Das müsst ihr in Aufgabe 2 zeigen.

Oft benutzt man die Regel von Bernoulli mehrmals um die Grenzwert zu bestimmen:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

(es ist sehr salopp geschrieben, es gibt noch Voraussetzungen damit man diese Regel anwenden können, jedoch will ich jetzt nicht in Details gehen)



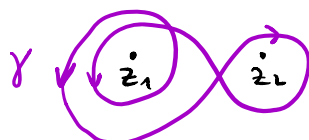
Verallgemeinerte Residuensatz

Bevor wir die Residuensatz verstehen können, brauchen wir ein Paar hilfreiche Werkzeuge:

I Windungszahl

Man definiert $W(\gamma, z_k)$ als: wie oft man den Punkt z_k in positiver Sinn umkreist.

Bsp 2:



$$W(\gamma, z_1) = 2$$

$$W(\gamma, z_2) = -1$$



II Residuum

Sei z_0 eine Singularität von f , so nennt man c_{-1} (der Koeffizient, in der Laurentreihe von f um z_k , vor $(z-z_k)^{-1}$) das Residuum von f an der Stelle z_0 . Man schreibt:

$$\text{Res}(f, z_k) = c_{-1}$$

→ Bsp 3:

Wenn man jetzt die Definition der Residuum mit die Definition von die Koeffizienten der Laurentreihe (Übung 6): $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ vergleicht, merkt man:

$$\text{Res}(f, z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-1+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{=: Residuensatz!}$$

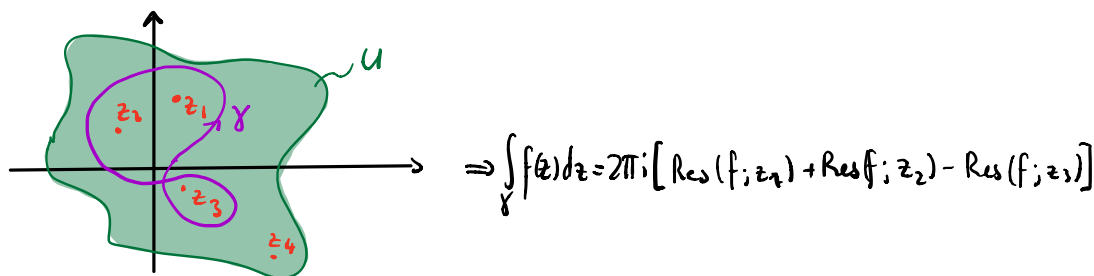
Im Fall wenn es mehrere Singularitäten gibt (in γ) und wenn man die mehrmals umkreist, kann man diesen Satz, mit noch die entsprechende Voraussetzungen, verallgemeinern. Man bekommt den Ausdruck:

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine zusammenhängende Menge, γ ein Weg sowie $z_1, \dots, z_n$ in U .

Sei f holomorph auf $U \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f; z_k) \cdot W(\gamma, z_k)$$

Graphisch:



Es wird dann offensichtlich klar, dass Residuen zu berechnen ziemlich wichtig ist. Zu diesem Zweck gibt es die Entwicklung der Laurentreihe um den Punkt z_0 , aber auch ein Paar Tricks:

i) Residuum für Polstelle:

Sei $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und z_0 ist eine Polstelle m -ter Ordnung, dann gilt:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{\overset{(m-1)\text{-te Ableitung}}{\varphi^{(m-1)}}(z_0)}{(m-1)!}$$

ii) Residuum für hebbare Singularität:

$$\text{Res}(f, z_0) = 0 \quad (c_{-1} = 0)$$

iii) Residuum für gerade Funktion:

Sei $z_0 = 0$ ein Singularität. Falls f eine gerade Funktion ist (d.h. $f(-z) = f(z)$) dann enthält ihre Reihenentwicklung nur gerade Exponenten (d.h. $\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{2n}$), und anders gesagt die Koeffizienten aller ungeraden Exponenten sind gleich Null. Insbesondere $c_{-1} = 0$, also

$$\text{Res}(f; 0) = 0$$

→ Bsp 3:

Identitätsprinzip

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f(z) = g(z) \quad \forall z$ in einer offenen Menge oder auf einer Teilstrecke. Dann gilt:

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in U$$



Beispiele

Beispiel 3: Berechne den Residuum von die Singularität von $f(z) = z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right)$

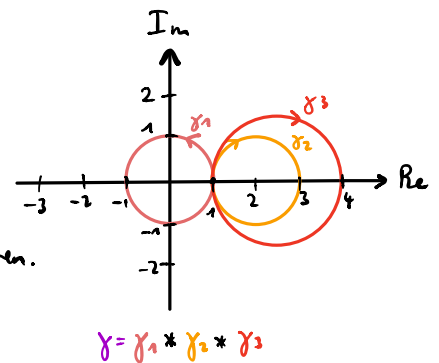
$\Rightarrow$ Singularität ist $z_0 = 0$ d.h. wir können die Reihe in 0 entwickeln!

$$f(z) = z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2-n}}{n!} \underset{\substack{n'=2-n \\ n=2-n' \\ \text{oben: } n'=2-\infty=-\infty \\ \text{unten: } n'=2-0=2}}{=} \sum_{n'=2}^{-\infty} \frac{z^{n'}}{(2-n')!} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^2 \frac{z^n}{(2-n)!} = \frac{z^2}{(2-2)!} + \frac{z^1}{(2-1)!} + \frac{z^0}{2!} + \underbrace{\frac{z^{-1}}{(2-(-1))!}}_{c^{-1} = \text{Res}(f; 0)} + \dots$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f; 0) = \frac{1}{(2+1)!} = \frac{1}{6}$$

Beispiel 4: Berechne $\int_{\gamma} \frac{z+1}{z^3-2z^2} dz$ entlang der Weg:



Natürlich wäre ein direktes Berechnung ein Abkramm zu berechnen.

Zum Glück können wir den Residuensatz benutzen

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f; z_k) \cdot W(\gamma, z_k)$$

Also: - welche Singularitäten hat $f(z)$? $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-2)}$ also $z_1 = 0$ und $z_2 = 2$

- welche Singularität kreist γ um, wie viel mal und in welche Richtung?

γ entschließt beide z_1 und z_2 mit Windungszahlen: $W(\gamma, z_1) = 1$
 $W(\gamma, z_2) = -2$

- Was ist der Residuum von die Singularitäten?

Wir betrachten beide Singularitäten separat:

$z_1 = 0$: Bevor wir das Residuum überhaupt berechnen können, müssen wir uns fragen: was für eine Singularität ist es?

Eine Polstelle 2-ter Ordnung da $f(z) = \frac{z+1}{z^2} = \frac{\varphi(z)}{(z-0)^2}$

mit $\varphi(z) = \frac{(z+1)}{(z-2)}$ holomorph in einer kleinen Umgebung von $z_1 = 0$

$$\text{und } \varphi(z_1=0) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

Mit den Residuensatz für Polstellen erhalten wir:

$$\text{Res}(f; 0) = \frac{\varphi^{(2-1)}(0)}{(2-1)!} = \left. \frac{d}{dz} \frac{z+1}{z-2} \right|_{z=0} = \left. \frac{(z-2) + (z+1)}{(z-2)^2} \right|_{z=0} = \frac{-2+1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$$

$z_2 = 2$: Hier handelt es sich um eine Polstelle 1-ter Ordnung da

$$f(z) = \frac{z+1}{z-2} \quad \text{mit } \varphi(z) = \frac{z+1}{z^2} \text{ in einer kleinen Umgebung von } z_2$$
$$\text{und } \varphi(z_2=2) = \frac{3}{4} \neq 0$$

Das Residuum ist somit:

$$\Rightarrow \text{Res}(f; 2) = \frac{\varphi^{(1-1)}(z_2=2)}{(1-1)!} = \varphi(2) = \frac{3}{4}$$

Somit:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^2 \text{Res}(f; z_k) \cdot W(\gamma, z_k) = 2\pi i \left(-\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot -2 \right) = 2\pi i \left(-\frac{7}{4} \right) =$$
$$= -\frac{7\pi i}{2}$$

Vorbesprechung / Tipps

- 1) Generelle Reihe-darstellung von einer hebbaren Singularität bzw. Polstelle aufschreiben, und mit den Annahmen vergleichen. Wie sieht $\varphi(z)$ holomorph aus?
- 2) 2 Dinge überprüfen:
 1. Das die Gleichung für ^{a) hebbare Singularitäten}
b) Polstellen gilt.
 2. Das es für andere stärkere Singularitäten nicht gilt.
- 3) Sollte gehen mit was es in die Theorie gibt, aber um Fehler zu vermeiden richtig zeigen wieso man etwas annehmen darf (z.B. für polstellen m -ter Ordnung φ ist holomorph in einer kleinen Umgebung von z_k und $\neq 0$ in z_k)
→ Bernoulli - l'Hôpital nicht vergessen bei Grenzwerten
- 4) Reihe entwickeln ist oft ziemlich effizient
- 5) Aufgabenstellung gut lesen (also alle Voraussetzungen) und Residuensatz verwenden
- 6) Ein Paar Dinge die helfen könnten
 - $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
 - $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
 - $\overline{\int f(z) dz} = \int \overline{f(z)} dz$
 - Residuensatz
 - Linienintegral $(\int_\gamma f(z) dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt)$