

Übung 6 KomA

Jean Mégret 30-31.03.2020

Infos:

Nachbesprechung:

Theorie

Satz von Liouville

Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und sei $f(z)$ beschränkt.
 $\Rightarrow f(z)$ ist konstant.

Reihenentwicklung

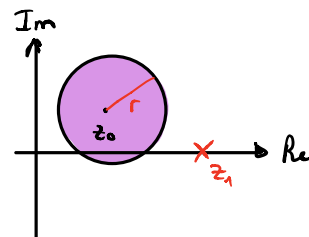
Warum ist es überhaupt wichtig Funktionen in Reihen zu entwickeln?

- $\hookrightarrow$ Dann können wir eine Funktion approximieren durch eine Polynom, und das ist in vielen Situationen sehr nützlich. (u.a.: Differentialgleichungen lösen, Integrale berechnen, ...)
- $\hookrightarrow$ Es ist auch gut sich zu erinnern, manche Funktionen sind durch Reihen definiert (wie unsere beliebige Exponentialfunktion)

I/ Satz von Taylor:

Sei $B(z_0, r) \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$. Dann gilt $\forall z \in B(z_0, r)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$



Bem.: • holomorphe Funktionen gleich ihren Taylorreihen
 $\hat{=}$ sind analytisch

- Falls $z_0 = 0$ heißt die Reihe Maclaurin-Reihenentwicklung
- Um den Konvergenzradius einer Taylorreihe zu bestimmen, können wir einfach schauen ab welchem Radius, die Funktion nicht mehr holomorph ist. (Sonst Quotienten- bzw. Wurzelkriterium)
- $\rightarrow$ Beispiel 1(i)
- Oft findet man die Taylorreihe durch Zusammensetzung bekannter Maclaurin-Reihenentwicklung:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z}{c}\right)^d} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{c}\right)^{d \cdot k} \quad \text{mit } \left|\frac{z}{c}\right| < 1$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

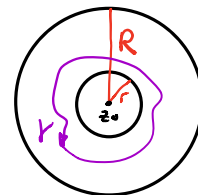
$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- Das ist ganz nett aber falls es in U eine Singularität ($\hat{=}$ Loch in Definitionsbereich, typischerweise aufgrund einer Division durch 0) funktioniert es nicht mehr, weil die Reihe konvergiert nicht mehr... Zum Glück können wir trotzdem $f(z)$ in einer Reihe entwickeln dank die sogenannte Laurentreihe.

II / Satz der Laurentreihe:

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, mit $\{z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z| \leq R\} \subseteq U$, U offen. Dann gilt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{wobei} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega^{n+1}} d\omega$$



Diese Definition kann man für ein beliebige Entwicklungspunkt erweitern:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega$$

Isolierte Singularitäten

Isolierte Singularitäten ($\hat{=}$ Löchern in Definitionsbereich) sind Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$ wobei:

- f nicht holomorph ist ($\hat{=}$ Singularität)
- $f(z)$ ist holomorph in eine kleine Umgebung von z_0 ($\hat{=}$ isoliert)

$\Rightarrow$ Man kann keine Taylorreihe in z_0 entwickeln. Aber es gibt eine Laurentreihe um z_0 .

Es gibt mehrere Typen von Singularitäten. Die kann man klassifizieren indem man die Laurentreihe um z_0 entwickelt und analysiert. z_0 ist eine ...

... **wesentliche** Singularität: falls $c_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$. ($\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$)

... **Pol / Polstelle** der Ordnung $m \geq 1$ falls $c_{-m} \neq 0$ und $c_n = 0 \quad \forall n < -m$ ($\sim \sum_{n=-m}^{\infty} c_n z^n$)

... **hebbarer** Singularität falls $c_n = 0 \quad \forall n < 0$ ($\sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \rightarrow$ Taylorreihe!)

Es gibt weitere Art und Weise um zu bestimmen welche Typ von Singularität es sind aber wir werden es später sehen (Satz: Residuen für Polstellen)

Bsp 1: Entwickeln sie die Funktion $f(z) = \frac{1+z^2}{z-2}$ in einer Reihe:

i) Um den Punkt 0: $(f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + O(z^3))$

geometrische Reihe (*)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2} + \frac{z^2}{z-2} = -\frac{1}{2-z} + \frac{z^2}{2-z} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{z^2}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^{n+2} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 - O(z^4)\right) + \left(\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^3 + O(z^4)\right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + \frac{3}{16}z^3 + O(z^3) \end{aligned}$$

Koeffizienten: $a_0 = -\frac{1}{2}$ $a_1 = -\frac{1}{4}$ $a_n = \frac{3}{2^{n+1}}$ für $n \geq 2$

Was ist der Konvergenzradius dieser Reihe?

- Mithilfe der Satz von Taylor, wissen wir es ist bei $r=2$, da ab diesem Punkt f ist nicht mehr holomorph.
- Wir sehen die geometrische Reihe (*) können wir nur anwenden falls $|\frac{z}{2}| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$
- Sonst Quotientenkriterium: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3/2^{n+1}}{3/2^{(n+1)+1}} = \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = 2$

ii) Um seine Singularität und geben Sie die Art von Singularität:

1. z_0 bestimmen: $z_0 = 2$

2. Laurentreihe entwickeln: ⚠ jetzt können wir die geometrische Reihe nicht mehr anwenden, da geo. Reihe ist um 0 entwickelt. ⚠

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1-z^2}{z-2} = \frac{-1+z^2}{2-z} = \frac{(2-z)^2 - (4-4z+z^2) - 1+z^2}{(2-z)} = \frac{(2-z)^2 - (8-4z)+4-z^2-1+z^2}{(2-z)} \\ &= \frac{(2-z)^2}{(2-z)} - \frac{4(2-z)}{(2-z)} + \frac{3}{(2-z)} = (2-z) - 4 + 3(2-z)^{-1} = \sum_{n=-1}^1 C_n (2-z)^n \text{ mit } \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_0 = -4 \\ C_{-1} = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

↳ Laurent-Reihe!

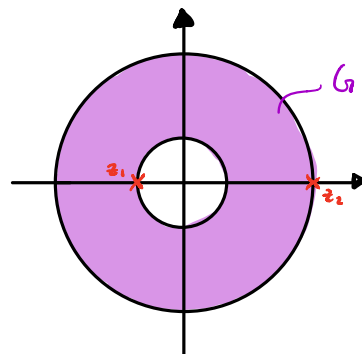
3. Art von Singularität?: Pol der Ordnung $m=1$ da $C_{-1} \neq 0$ und $C_n = 0 \forall n < -1$

Bsp 2: Entwickeln Sie $f(z) = \frac{-4}{(3-z)(1+z)}$ um 0 auf $G = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$.

Wir würden gern die geometrische Reihe anwenden.

Es gibt aber 2 verschiedene Linear-faktoren im

Nenner... Also benutzen wir die Partialbruch Zerlegung.
(PBZ)



$$f(z) = \frac{-4}{(3-z)(1-z)} = \frac{A}{(3-z)} + \frac{B}{(1+z)} = \frac{A(1+z) + B(3-z)}{(3-z)(1+z)}$$

$$\Rightarrow -4 = A(1+z) + B(3-z) \quad \forall z$$

$$\text{Wir wählen } z = -1: -4 = A(1-1) + B(3+1) = B \cdot 4 \quad \Leftrightarrow B = -1$$

$$\text{Wir wählen } z = 3: -4 = A(1+3) + B(3-3) = A \cdot 4 \quad \Leftrightarrow A = -1$$

$$\hookrightarrow f(z) = \frac{-1}{(3-z)} + \frac{-1}{(1+z)} = \frac{-1}{3} \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{z}{3}}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\frac{1}{1 - (-z)}}_{\textcircled{2}} =$$

① $|\frac{z}{3}| < 1$ in ganz G also wir können die geo. Reihe anwenden.

② $|-z| > 1$ in ganz G also wir können nicht die geo. Reihe anwenden (weil es konvergiert nicht)

$$\text{Wir formen ② um } \frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \frac{1}{\frac{1}{z} + 1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - (-\frac{1}{z})} \quad \text{jetzt } |-\frac{1}{z}| < 1 \text{ auf } G$$

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^{n+1} = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n z^n \end{aligned}$$

Vorbesprechung / Tipps

1) a) Funktion als Multiplikation einzelner Terme, deren wir die Reihenentwicklung kennen.

Für jeden Term einzeln die Reihe berechnen und die ersten 3 Koeffizienten schreiben:

$$t_1 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + O(z^3)$$

Dann alles zusammen multiplizieren.

b) Hier ist es nicht möglich, die Quotienten-/Wurzelkriterium anzuwenden, weil wir kennen nur die ersten 3 Koeffizienten. Wie kann man sonst den Konvergenzradius bestimmen?

2) siehe Bsp.

3) Es ist implizit gemeint um 0. (Wir kennen ja auch nicht die Reihenentwicklung von $\cos$ und $\sin$ auf anderen Punkten nicht)

iii) Nenner in linear Faktoren zerlegen.

Dann gut schauen, ob die geometrische Reihe konvergiert.

4) siehe Bsp.

5) C-Mittelwertsatz von letzter Woche anschauen.

a) Satz 4.2 b) könnte helfen

b) Beweis per Widerspruch: Annahme Aussage gilt: Was wenn f ein striktes lokales Max hätte? Verletzt das dann irgendeinen Satz?

c) Wie b)