

Infos

Übungsstunde an Montag von 9.15 bis 10 Uhr.
Q&A Session am Dienstag von 11.10 bis 12 Uhr. } auf Zoom

Nachbesprechung

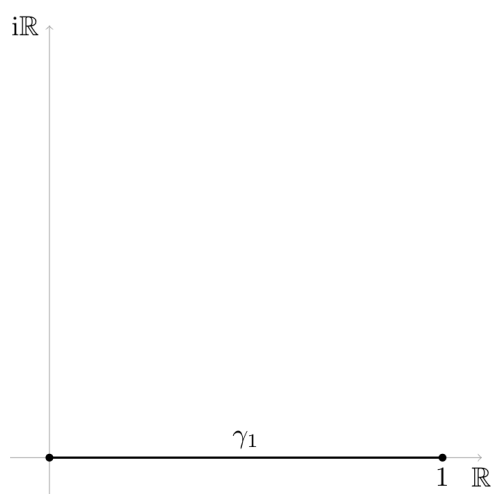
Aufgabe 5. Betrachten Sie die beiden Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, welche in Abbildung 1 dargestellt sind. Berechnen Sie damit die Integrale

(i) $\int_{\gamma_1} \operatorname{Re}(z) dz,$

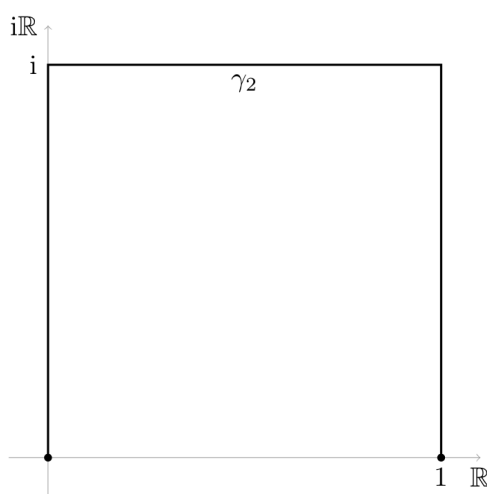
(iii) $\int_{\gamma_1} z^2 dz,$

(ii) $\int_{\gamma_2} \operatorname{Re}(z) dz,$

(iv) $\int_{\gamma_2} z^2 dz.$



(a)



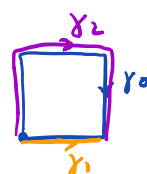
(b)

Abbildung 1: Die Wege γ_1 und γ_2 .

Interessant zu bemerken: iii) und iv) geben das Gleiche Resultat, aber i) und ii) nicht ... Warum?

$\Rightarrow$ Satz der Stammfunktion! Da z^2 eine Stammfunktion besitzt ($\frac{z^3}{3}$), sind alle geschlossene Integral 0. Das hat zur Folge: Warum?

$$\int_{\gamma} z^2 dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = \frac{z^3}{3} \Big|_{z=1} - \frac{z^3}{3} \Big|_{z=0} = \frac{1}{3}$$



$$\int_{\gamma_0} = 0 = - \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}$$

Theorie

Theorie über (einfach) zusammenhängende Mengen und Homotopie ist in die separate Blatt KomAnhangÜbung4.pdf auf meiner Website zu finden.

Cauchy'sche Integralformel (C.I.F.) oder Integralsatz von Cauchy

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängende Gebiet, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion in U (!), $z_0 \in U$ ein Punkt, $\gamma[0,1] \rightarrow U \setminus \{z_0\}$ ein Weg der z_0 einmal im positive Umlaufrichtung umläuft. Dann gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \iff \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

↻ positiv

↻ negativ

Right Thumb up

Right Thumb down



Frage an euch: Was wenn γ z_0 in negativ umläuft?

Bsp: Brown-Churchill Chap4.50 Example:

Bestimme $I = \int_{\gamma} \frac{z}{(9-z^2)(z-i)} dz$ mit $\gamma(t) = 2e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$

Direkte Berechnung:

$$I = \int_0^1 \frac{2e^{2\pi i t} \cdot 4e^{2\pi i t}}{(9-4e^{4\pi i t})(2e^{2\pi i t}-i)} dt = \dots \rightarrow \text{Hässlich, und ziemlich schwierig zu berechnen.}$$

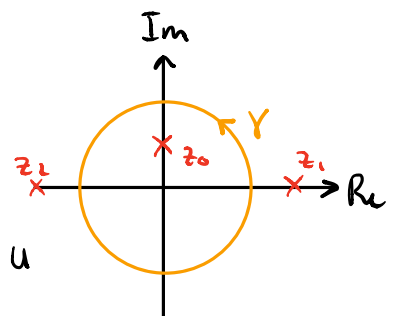
Cauchy'sche Integralformel:

i) Nullstelle von Integrand bestimmen:

$$z_0 = i, z_1 = 3, z_2 = -3$$

ii) Bild zeichnen:

Wir sehen, nur $z_0 = i$ liegt in γ . D.h. wenn wir ein gutes U



wählen, können wir C.I.F. benutzen. Wir wählen z.B.:

$U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 3\}$ offen und einfach zusammenhängend ✓ mit

$z_0 = i \in U$ ✓

und $\gamma: [0,1] \rightarrow U \setminus \{z_0\}$ umläuft z_0 einmal in positive Umlaufrichtung. ✓

dazu noch: $f(z) = \frac{z}{9-z^2}$ ist holomorph in U . ✓

Somit haben wir alle Voraussetzungen um C.I.F. zu benutzen. Wir schreiben I

um:

$$I = \int_{\gamma} \frac{z}{(9-z^4)(z-i)} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-i} dz = 2\pi i f(z_0=i) = 2\pi i \frac{i}{9-i^2} = \frac{-2\pi}{10}$$



Direkte
Integral



Cauchy'sche
Integralformel

Verallgemeinerte C.I.F.

U offen einfach zusammenhängend, f holomorph auf U ($\Rightarrow$ beliebig oft $\mathbb{C}$ -diff'bar), γ umläuft z_0 genau ein mal in positive Umlaufrichtung. Dann gilt:

$\downarrow$
n-te Ableitung von f

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad \text{bzw.} \quad \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Bsp: Brown-Churchill Chap 4.51 Example 1

Berechnen Sie $I = \int_{\gamma} \frac{\exp(2z)}{z^4} dz$ wobei $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$

Wir wählen $U = \mathbb{C}$, mit $f(z) = e^{2z}$ und $z_0 = 0$ sind alle Voraussetzungen erfüllt.

Verallgemeinerte C.I.F.:

$$I = \int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{(z-0)^{3+1}} dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(0) = \frac{2\pi i}{6} \cdot [8e^{2z}]_{z=0} = \frac{\pi i}{3} \cdot 8$$

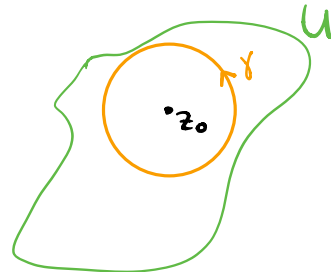
Komplexer Mittelwertsatz

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$, $r > 0$ sodass

$$\partial B(z_0, r) \subseteq U:$$

$\uparrow$ Rand
 $\uparrow$ Ball

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + re^{2\pi i t}) dt$$



$\Rightarrow$ den Wert von $f(z_0)$ ist durch der Mittelwert von f entlang ein Kreis in z_0 zentriert gegeben!

$\int_{\text{Kreis}} f dz$

Vorbesprechung / Tipps

1) i), ii) Als Erinnerung $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

iii) $\sin(-z) = -\sin(z)$, $\cos(-z) = \cos(z)$

iv) Aufgabe 1. i) benutzen

v) $|f(z)| = \sqrt{\operatorname{Re}(f(z))^2 + \operatorname{Im}(f(z))^2}$, Aufgabe 1. iv) benutzen

2) a) Was wissen wir aus Übungsstunde 3 für $f'(z)$ wenn $f(z)$ $\mathbb{C}$ -diff'bar ist? holomorph

Welche weitere Eigenschaft erfüllt eine holomorphe Funktion?

b) Keep in mind: u ist harmonisch d.h. $\Delta u = 0$

c) Satz von Cauchy sagt, falls g holomorph: $\int g(\tau) d\tau = f(z_1) - f(z_0)$
wenn $f'(z) = g(z)$ und γ ein Weg von z_0 bis z_1 ist.

d) -

3) a) $y^2 = x^2(x+1) \Leftrightarrow y = \pm x \sqrt{x+1}$

Plus und Minus separat zeichnen.

b) Das Weg als Verkettung (siehe Übung 4) von 2 Kurven bilden.

c) Linear Homotopie benutzen (Extra-Blatt)

4) Immer alle Voraussetzungen für C.I.F klar schreiben.

5) Gleiche wie 4), dazu noch Satz der Stammfunktion anwenden

6) Zu zeigen ist quasi: $f(z)$ ist ein komplexes Polynom ersten Grades. Was heißt das für die zweite Ableitung nach z ? $\rightarrow f^{(2)}(z) = 0$ auf ganz $\mathbb{C}$. Um das zu zeigen, verallgemeinerte C.I.F anwenden (also $f^{(2)}(z) = \dots$) mit $\gamma(t) = Re^{2\pi i t}$ $t \in [0, 1]$.

Dann schauen was passiert für $R \rightarrow \infty$.

(ganze Funktion := holomorph auf ganz $\mathbb{C}$)

7]

$$\int \text{[Diagram of a triangle with a vector field]} = \int \text{[Diagram of a small triangle]} + \int \text{[Diagram of a rectangle]} + \int \text{[Diagram of a parallelogram]}$$

8] Interessante Aufgabe aber ich würde lieber erst alle andere Aufgaben gut verstehen.