

Übung 4 Kom A

Jean Mégret, 16-17.03.2020

Infos

→ Post auf Moodle & E-mail von Hauptassistent.

Nachbesprechung

Aufgabe 1 war ein bisschen problematisch.

Für Partielle Ableitungen einer Funktion $f(z) = f(x, y)$ nach x oder y , nimmt man immer die andere Variable als konstant. z.B.:

$$1. (iii) f(z) = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{(x+iy)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \underset{y \text{ als konst.}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{(x+iy)^2} = \frac{\partial}{\partial x} (x+iy)^{-2} \overset{\substack{\text{äußere-} \\ \text{Kettenregel}}}{=} -2 \cdot (x+iy)^{-3} \cdot \overset{\text{innere-ableitung}}{1} = \frac{-2}{(x+iy)^3}$$

Weiterhin, damit $f(z)$ in z_0 existiert, müssen beide von f_x und f_y in z_0 existieren.

Man kann immer verifizieren ob unsere $f'(z)$ richtig ist, indem man:

$$f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0) \quad \text{überprüft.}$$

Aber diese Gleichung genügt nicht um $f'(z_0)$ zu berechnen.

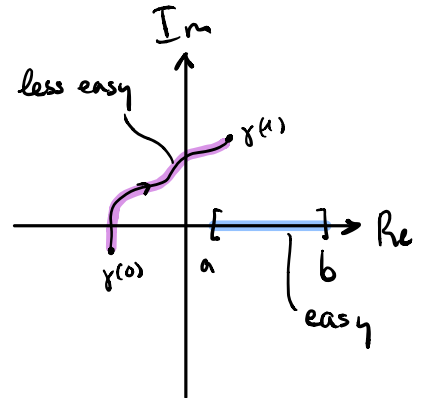
Man sollte in prinzip $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ für z_0 allgemein berechnen.

Theorie

Linienintegral

Sei $f: \underbrace{[a, b]}_{\in \mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}$ so definiert man das Integral:

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$$



Kurvenintegral

Wir definieren das Kurvenintegral von $f(z)$ entlang $\gamma(t)$ durch:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

wobei $\gamma(t): [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein parametrisierter Weg ist.

Aber wie parametrisiert man ein Weg?

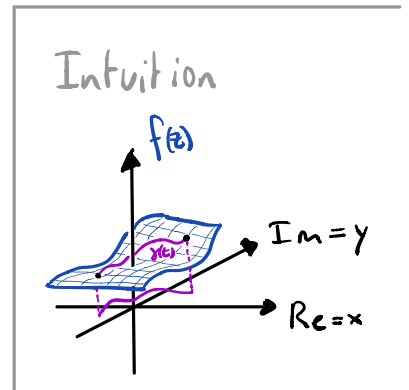
Gerade Strecke von w_0 nach w_1 : $(\gamma(0) = w_0, \gamma(1) = w_1)$

$$\gamma(t) = (1-t)w_0 + tw_1 = w_0 + t(w_1 - w_0)$$

Rotation von Winkel φ , um den Punkt w_0 mit Radius r :

$$\gamma(t) = w_0 + r e^{\pm i \varphi t} \quad \left[\begin{array}{l} +: \text{Gegenuhreisiger Sinn} \\ -: \text{Uhrzeigersinn} \end{array} \right]$$

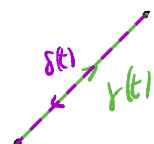
Rückwärtspfad $\gamma(1-t)$



Eigenschaften des Kurvenintegrals:

1- Unabhängige Parametrisierung

2- Rückwärts $\Rightarrow$ Negativ $\int_{\gamma} = - \int_{\delta}$ wenn $\delta(t) = \gamma(1-t)$

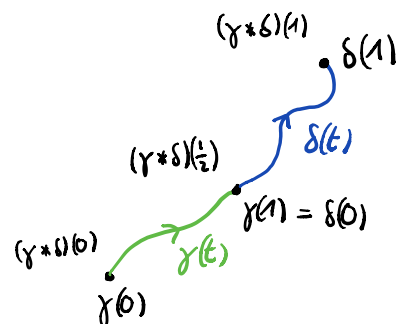


3- Linearität (S4 A2b)

4- Verkettung: Seien γ, δ Pfade mit $\gamma(1) = \delta(0)$

so definiert man die Verkettung:

$$(\gamma * \delta)(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \delta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$



$$\text{Dann gilt: } \int_{\gamma * \delta} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\delta} f(z) dz$$

! Satz der Stammfunktion !

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende beide Aussagen äquivalent:

(i) Für jede geschlossene Kurve $\gamma: [0,1] \rightarrow U$ (also $\gamma(0) = \gamma(1)$) gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

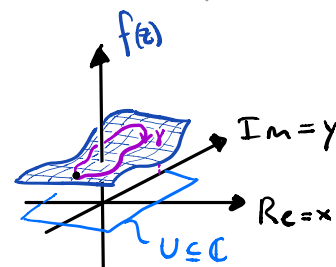
(ii) $f(z)$ besitzt eine Stammfunktion $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$

Aus (i) folgt:

Falls $\exists F: F' = f$ so ist $\int_{\gamma} f(z) dz$ wegunabhängig (!)

$$\text{und } \int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$

Intuition für (i)



Das Integral über γ ist 0. Man geht genauso viel Bergauf als Bergab.

Satz von Cauchy

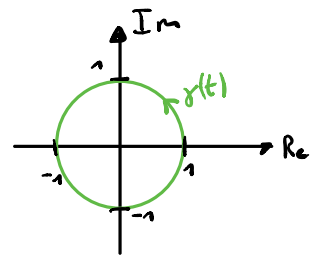
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph

$$\Rightarrow \exists F: U \rightarrow \mathbb{C} : F' = f \quad (\text{dann besitzt } f \text{ eine Stammfunktion})$$

Dieser Satz kann man sehr gut mit Satz der Stammfunktion verbinden

Bsp: Was ist $\int_{\gamma} z^2 dz$, wobei $\gamma(t)$ folgender Weg ist?

2 Möglichkeiten:



a) Direkte Berechnung:

i) $\gamma(t)$ parametrisieren: $\gamma(t) = 0 + 1 \cdot e^{2\pi i t}$ ($\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = 1$ ✓)

ii) Definition benutzen: $\int_{\gamma(t)} z^2 dz = \int_0^1 (e^{2\pi i t})^2 \cdot 2\pi i e^{2\pi i t} dt = 2\pi i \int_0^1 e^{4\pi i t} \cdot e^{2\pi i t} dt =$
 $= 2\pi i \int_0^1 e^{6\pi i t} dt = 2\pi i \left[\frac{1}{6\pi i} e^{6\pi i t} \right]_0^1 = 0$

b) Satz der Stammfunktion:

i) $f(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig auf $\mathbb{C}$, und besitzt die Stammfunktion auf $\mathbb{C}$

$F = \frac{z^3}{3}$. $F(z)$ ist eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}$ weil

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dz} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{z^3}{3} - \frac{z_0^3}{3}}{z - z_0} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0) \cdot (z^2 + z z_0 + z_0^2)}{(z - z_0)} = \frac{1}{3} \lim_{z \rightarrow z_0} (z^2 + z z_0 + z_0^2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3z^2 = z^2 \quad \forall z \text{ auf } \mathbb{C} \end{aligned}$$

ii) Da noch U (in unserem Fall $\mathbb{C}$) offen und zusammenhängend ist, können

wir Satz der Stammfunktion anwenden:

$$\int_{\gamma(t)} z^2 dz = 0 \quad \text{weil } \gamma(t) \text{ geschlossen ist.}$$

Vorbesprechung / Tipps

Vielles steht schon in Theorie Teil! Es ist auch wichtig in dieser Serie ziemlich genau zu sein. Also z.B. wenn man die Satz der Stammfunktion benutzen will, muss man auch alle Voraussetzungen verifizieren!

1) -

2) b) Benutze Dreiecksungleichung.

c) Parametrisierung einsetzen und schauen was passiert mithilfe von Hinweis.

3) -

4) Als Verifizierung von eure Resultat: Für welche n ist Satz der Stammfunktion gültig?

5) Man kann ein Weg als Verkettung von einfache Wege zerteilen.

6) Sollte klar sein, dass dieser Weg ist ziemlich schwierig zu parametrisieren... Was könnte man für ein andere Tool benutzen?

7) Hier wie bei 4 muss man die verschiedenen n betrachten... Man versteht schnell $n = -1 \Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{z}$ ist die Ausnahme.

a) Für $n \neq -1$: wie sollte die Stammfunktion aussehen? Zu zeigen, dass eine Funktion F in der Tat eine Stammfunktion ist sollte man immer $\frac{dF}{dz} = f(z)$ verifizieren.

$\downarrow$
haben wir letzte Woche
gesehen wie man es benutzt.

Für $n = -1$: Wie, mithilfe von was wir vorher gesehen haben, kann man überprüfen ob eine Funktion eine Stammfunktion besitzt?

b) $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist die ganz $\mathbb{C}$ -Ebene ohne der negative Reelle-Achse.

c) Resultat aus b) benutzen