

Nachbesprechung

Die Serien wurden immer weniger abgegeben, ich hoffe ihr schafft trotzdem die Serien einigermaßen zu lösen und zu verstehen. Die letzten Serien / Themen sind immer sehr Prüfungsrelevant, bleibt bis ende des Semesters dran.

Theorie

Satz von Parseval

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetige T -periodische Funktion und $\|f\|^2 < \infty$, dann gilt

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

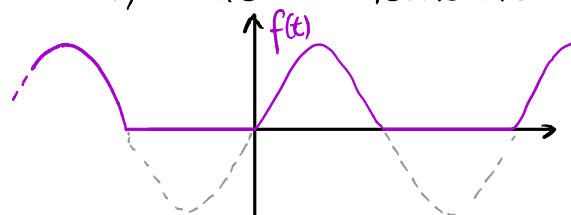
Bemerkungen: - zur Erinnerung: $|f(t)|^2 = f(t) \cdot \overline{f(t)}$ bzw. $|c_n|^2 = c_n \cdot \overline{c_n}$

- Für die $\mathbb{R}$ -Fourierreihe gilt: $\|f\|^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$

Beispiel 1: Gegeben $f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{wenn } t \in [0, \pi) \\ 0 & \text{wenn } t \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$

2π -periodisch, und die Reelle Fourierreihe

von $f(t)$: $\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi(4k^2-1)} \cos(2kt)$



↳ Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$

Nach Parseval gilt $\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$

$$\begin{aligned} \text{Einerseits: } \|f\|^2 &= \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \overline{f(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos(2t)) dt = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Andererseits: } \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{\pi(4k^2-1)}\right)^2\right] = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(4k^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} \right) = \frac{1}{16} (\pi^2 - 8)$$

Fouriertransformation

Vor 2 Wochen hatten wir die DFT (Diskrete Fourier Transformation) gesehen.

Es war eine Transformation, die uns die Gewichte der Koeffizienten der $\mathbb{C}$ -Fourierreihe gegeben hatte, also wie stark beeinflusst jede Frequenz $\frac{1}{T}$ unsere Funktion:

$$\text{DFT: } \hat{f}(n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} dt = c_n, \quad \hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i n t}$$

Aber bis jetzt könnten wir nur Periodische Funktionen in eine solche Reihe entwickeln, bzw. die DFT berechnen. Gerne hätten wir aber auch eine solche Zerlegung in harmonische Funktionen für nicht periodische Funktionen. Das schaffen wir, indem man sagt: Eine nicht-periodische Funktion ist eigentlich wie eine periodische Funktion mit Periode ∞ . Also wir nehmen unsere definition der DFT und lassen $T \rightarrow \infty$ gehen. Dann bekommt man die kontinuierliche Fouriertransformation (nennt man es auch einfach Fouriertransformation)

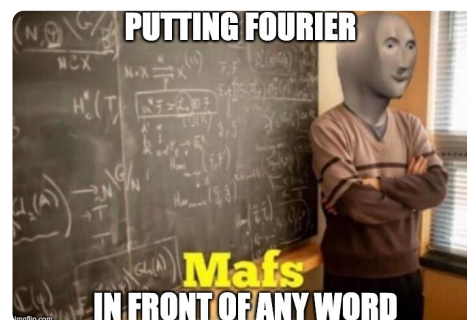
$$F(f(t)) = \hat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

→ um solche Integrale zu berechnen haben wir uns mit der Typus III aus Übungsstunde 8 schon vorbereitet, wenn $f(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$ mit $\deg(p) + 2 \leq \deg(q)$

$\hat{f}(\omega)$ ist eine, im gegensatz zur DFT $\hat{f}(n)$, kontinuierliche Funktion.

Die Inverse der Fouriertransformation ist definiert als:

$$F^{-1}(f(\omega)) = \check{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$



Beide Formeln gelten nur unter die Voraussetzung $f(t)$ ist absolut integrierbar, sprich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

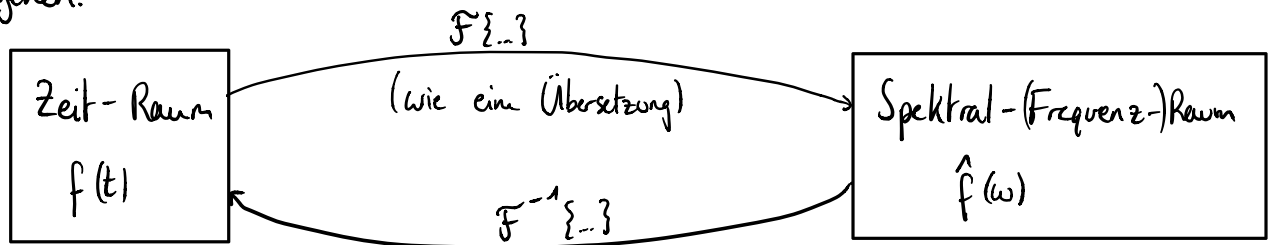
Die Integralsatz von Fourier verbindet beide Formeln. Seien $f(t)$ und $\hat{f}(\omega)$ absolut integrierbar dann gilt:

- $f(t)$ ist stetig

$$- f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = F^{-1}\{F\{f(t)\}\}$$

Die Fouriertransformation nennt man auch manchmal die Spektraldarstellung von unsere Funktion.

Diese Spektraldarstellung ist wie ein andere representation, oder ein Bild, unseres Funktion in ein andere Raum. Wir können von ein Raum in die anden wechseln mithilfe den Operatoren $\mathcal{F}\{...\}$ bzw $\mathcal{F}^{-1}\{...\}$, und die tatsache, dass durch die Transformation wird keine Information verlieren gehen.



Der Grund wieso man das macht ist: Manche Probleme sind einfacher in eine oder die andere Darstellung zu lösen. Mehr dazu werden wir in die nächsten Wochen sehen, jetzt konzentrieren wir uns auf die Transformation selbst mit noch einige Eigenschaften der Fouriertransformation:

- | | | |
|------|--|---|
| i) | $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$ | Linearität |
| ii) | $\widehat{f(t-a)}(\omega) = e^{-i a \omega} \hat{f}(\omega)$ | Verschiebung I |
| iii) | $\widehat{e^{iat} f(t)}(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$ | Verschiebung II |
| iv) | $\widehat{f(at)}(\omega) = \frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ | $\forall a \in \mathbb{R}$
Streckung |
| v) | $\widehat{\widehat{f(t)}} = 2\pi f(-t)$ | |
| vi) | $\widehat{f^{(n)}(\cdot)}(\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$ | Ableitung I |
| vii) | $\widehat{t^n f(t)}(\omega) = i^n \cdot \frac{d^n}{d\omega^n} \hat{f}(\omega)$ | Ableitung II |

Ein Beispiel von die Fouriertransformation vorrechne ich am Dienstag von 11 bis 12 (später auf Website verfügbar).

Satz von Plancherel: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar mit Fourier-Transformation $\hat{f}(\omega)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

Vorbesprechung / Tipps

Wenn ihr etwas Zeit habt mach die Multiple choice Fragen, hilfreich für die Verständnis!

1) Siehe Beispiel 1

2) a) Welche eigenschaft erfüllt $f(t)$ wenn $f(t) \in \mathbb{R}$? $\overline{f(t)} = \dots$

Was folgt dann daraus, wenn man $\overline{c_n}$ berechnet?

b) $\widehat{M_m f}(n)$ in die Definition der DFT einsetzen.

3) Jetzt sind wir nicht mehr bei der DFT sondern bei der (kontinuierliche) Fouriertransformation.

→ Beide Seite von der zu beweisenden Gleichung einsetzen und umformen damit eine Seite die andere Gleichheit.

4) a) Integral in eine Summe von 2 Integralen umschreiben $\left(\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b \right)$.

b) Das Resultat sollte das Integralsatz von Fourier bestätigen.

Hinweis: Gleiche vorgehensweise wie bei Übungsstunde 8 Typus III

c) Hier müsst ihr tatsächlich beide Seite ausrechnen und dann vergleichen.

Aus welcher Satz könnt ihr die Lösung erwarten können?

5) Aus der Vorlesung $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi}{\xi}$