

Nachbesprechung

Aufgabe 1:

iii) Ziel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ berechnen mithilfe von S8A4

Wie sind wir damals vorgegangen?

1. zeigen $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz = 0$, mit $f(z) = \pi \cot(\pi z)$.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz \right| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} 4(2N+1) \cdot \frac{2\pi}{(2(N+\frac{1}{2})-1)^2} = 0$$

haben wir schon letzte Woche besprochen, $f(z)$ ist durch 2π beschränkt

2. Residuensatz anwenden auf unser Integral:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{(z-1)^2}, z_i\right) \stackrel{\text{Nach Punkt 1.}}{=} 0$$

2.1 Lage und Typ von Singularitäten bestimmen

Welche z_i (Singularitäten) hat $\frac{f(z)}{(z-1)^2} = \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z-1)^2} = \frac{\pi \cos(\pi z)}{(z-1)^2 \sin(\pi z)}$?

$$\underline{z_k = k}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \leftarrow \text{Polstelle 1. Ordnung}$$

$$\underline{z^{(1)} = \frac{1}{2}} \quad \leftarrow \text{Polstelle 2. Ordnung}$$

2.2 Residuen berechnen

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{(z-1)^2}, \underline{z_k}\right) &= \lim_{z \rightarrow k} (z-k) \frac{\pi \cos(\pi z)}{(z-1)^2 \sin(\pi z)} = \frac{\pi \cos(\pi k)}{(2k-1)^2} \lim_{z \rightarrow k} \frac{(z-k)}{\sin(\pi k)} = \\ &= \frac{\cancel{\pi \cos(\pi k)}}{(2k-1)^2} \lim_{z \rightarrow k} \frac{1}{\cancel{\pi \cos(\pi z)}} = \frac{1}{(2k-1)^2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{(z-1)^2}, \underline{z^{(1)}}\right) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{d}{dz} \frac{\pi \cos(\pi z)}{(z-1)^2} \cdot \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{d}{dz} \frac{\pi \cos(\pi z)}{4 \left(z - \frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} -\pi \sin(\pi z) = -\frac{\pi^2}{4} \underbrace{\sin\left(\pi \cdot \frac{1}{2}\right)}_{=1} = -\frac{\pi^2}{4}$$

2.3 Alles in Residuensatz einsetzen, umformen und in Kopf behalten was unseres

Ziel ist: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = ?$

$$0 \stackrel{!}{=} 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{(z-1)^2}, z_i\right) = 2\pi i \left(-\frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}}_{\text{Fast was wir wollen!}} = \frac{\pi^2}{4} \stackrel{\text{Reihe umformen}}{=} \dots + \frac{1}{(-4-1)^2} + \frac{1}{(-2-1)^2} + \frac{1}{(0-1)^2} + \frac{1}{(2-1)^2} =$$

$$= \dots + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = 2 \cdot \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) =$$

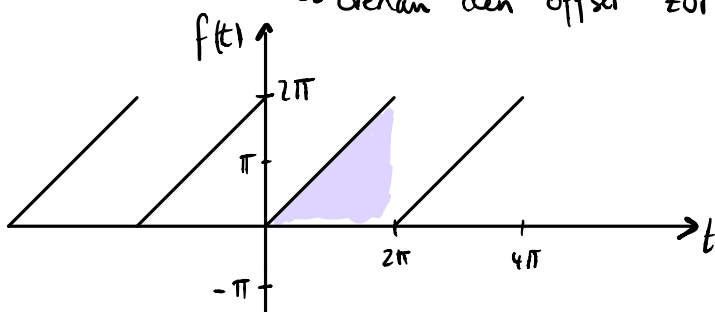
$$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad \text{genau was wir wollen}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{8}$$

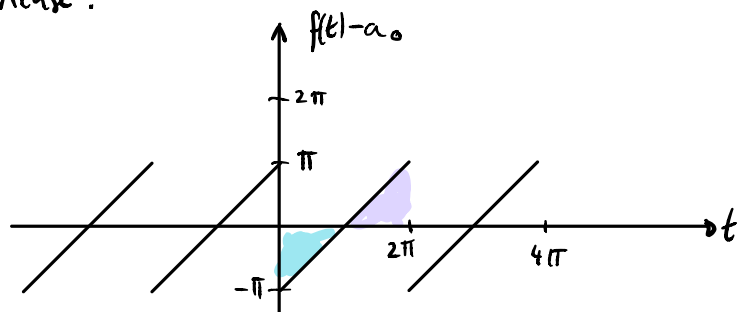
Aufgabe 4&5: ⚠️ c_0 bzw. a_0 immer separat berechnen ⚠️

Was repräsentieren c_0 und a_0 in die Fourierreihenentwicklung?

↳ Genau den offset zur t -Achse!



$\Rightarrow$



Theorie

Fourierreihen

Durch die Übungen und der Vorlesung haben wir viele Tricks kennengelernt z.B.:

- Falls $f(t)$ gerade ist, dann alle b_n sind gleich 0
- — " — ungerade ist, — " — a_n sind gleich 0
- Sei f T -periodisch, so gilt $\int_0^T f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt$
- $a_n = c_n + c_{-n}$
- $b_n = i(c_n - c_{-n})$
- $\vdots$

Und noch mehr. Mein Ratschlag wäre alle diesen Tricks die ihr gesehen habt auf dem Zusammenfassung zu schreiben, es kann manchmal viel Zeit sparen. Aber man muss immer begründen bevor man irgendwelche abkürzung nimmt, zeigen, dass alle Voraussetzungen erfüllt sind. Ohne Argumentation verliert man viele Punkte!

Satz von Dirichlet Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodische, stückweise stetige Fkt.

derart, dass $\forall t \in \mathbb{R}$ die linke sowie auch die rechte Ableitung existiert. Dann:

- i) c_n sowie auch $\hat{f}$ sind wohldefiniert.
- ii) die Fourierreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ konvergiert $\forall t \in \mathbb{R}$
- iii) $\hat{f}(t) = f(t)$ wo f stetig ist
- iv) wo f nicht stetig ist (in t_0) konvergiert die Reihe gegen:

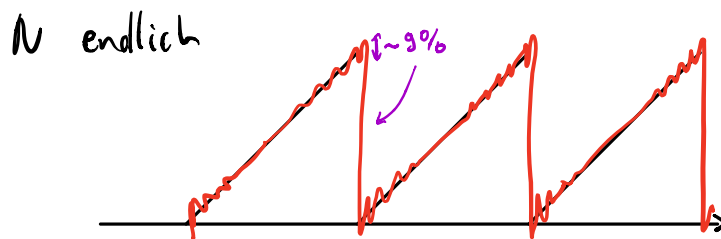
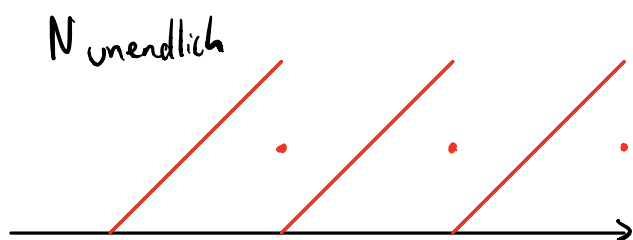
$$\hat{f}(t_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t_0 - \varepsilon) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t_0 + \varepsilon) \right) \quad (\text{Durchschnitt zwischen L&R Seite})$$

$\Rightarrow$ D.h. man kann nicht einfach schreiben $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ falls $f(t)$ Unstetigkeiten besitzt.

Erklärt Sga4e).

Gibbs Phänomen (Interessant in der Praxis, z.B. bei erzeugen von eckigen Signalen)

Bei einer endlichen Fourierreihe, gibt es, in der Nähe von Sprungstellen eine Over-/Undershoot von etwa 9% der Sprunghöhe.



Faltungen

Es würde in der VL nur eingeführt, aber man braucht es für die Serie.

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei integrierbare Funktionen, so definiert man ihre Faltung:

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Eine Faltung besitzt folgende Eigenschaften:

(i) $(f * g)(t) = (g * f)(t)$

(ii) $((f * g) * h)(t) = (f * (g * h))(t)$

(iii) $((af + b \cdot g) * h)(t) = a(f * h)(t) + b(g * h)(t)$, $a, b \in \mathbb{C}$

(iv) $(f(x-a) * g(x))(t) = (f * g)(t-a)$

Eine Faltung ist typischerweise relativ schwierig durch direkte Berechnung zu bestimmen. Darum lösen wir es graphisch. (Später werden wir sehen, dass wir eine Faltung auch anhand der Fouriertransformation berechnen können. $\leadsto$ Faltungstheorem)

Bsp:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 2t & t \in [0, 2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechne $(f * g)(t)$

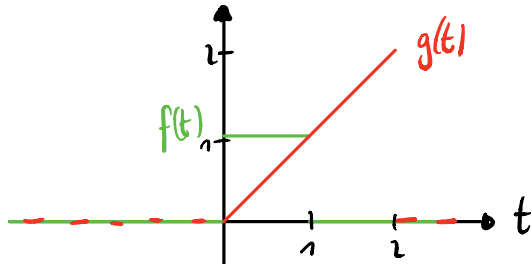
1. Faltung aufschreiben, und wählen welche funktion welche Argument hat:

Eigenschaft (i)

$$(f * g)(t) \stackrel{(i)}{=} (g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

wählen wir für dieses Beispiel

2. Beide Funktionen zeichnen (Farben können helfen)



3. Wann ist die Integral ungleich 0?

$f(\tau)$ ist genau ungleich 0 wenn

$$0 < \tau < 2$$

$g(t-\tau)$ ist genau ungleich 0 wenn

$$0 < t-\tau < 2$$

$$-t < -\tau < 2-t$$

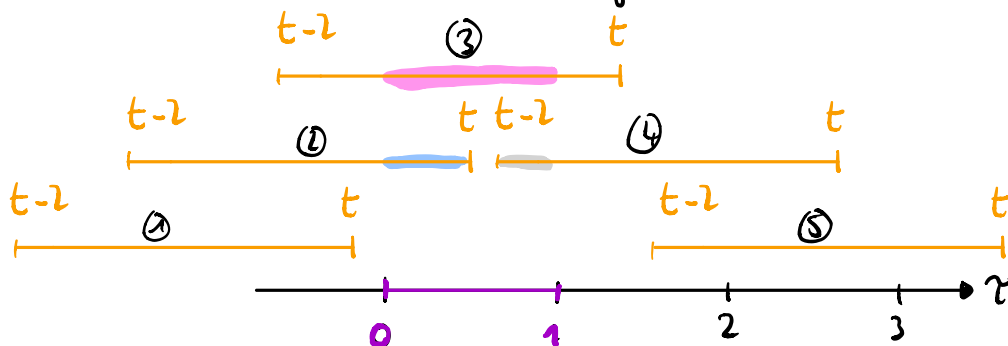
$$t > \tau > t-2$$

$\Rightarrow$ Damit die Faltung ungleich 0 wird, muss $\tau \in [0, 1] \cap [t-2, t]$

Was bedeutet das? Graphisch sieht man es gut, für alle t wo es ein Schnitt gibt, dann die Faltung wird ungleich 0.

4. Integrationsbereiche bestimmen

Da t ein variable ist bewegen wir t und schauen wir: für welche t gibt es ein schnitt?



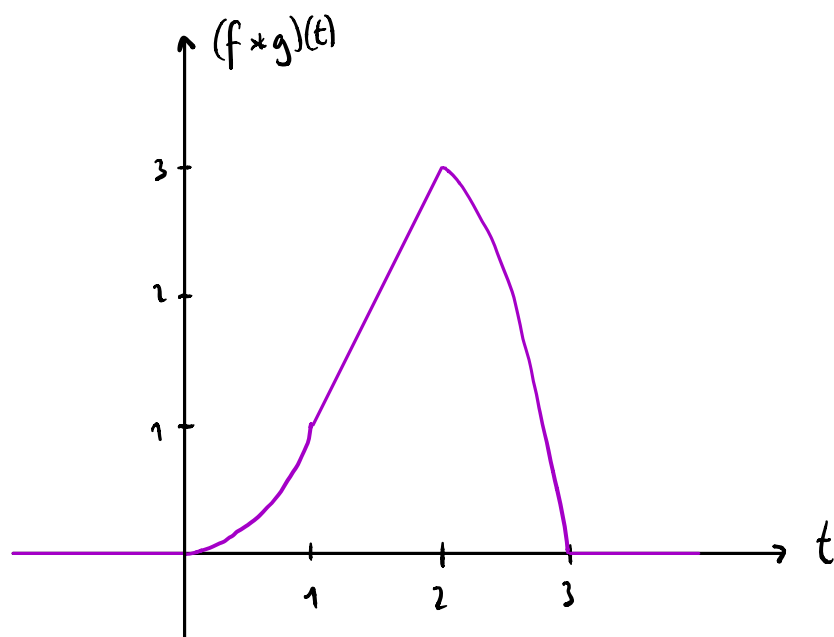
wie ein cursor
den wir rechts und
links bewegen können

$$\left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & t < 0 \quad ① \\ [0, t] & 0 \leq t \leq 1 \quad ② \\ [0, 1] & 1 < t \leq 2 \quad ③ \\ [t-2, 1] & 2 \leq t \leq 3 \quad ④ \\ \emptyset & t > 3 \quad ⑤ \end{array} \right.$$

5) Integrieren

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \int_0^t 1 \cdot 2(t-\tau) d\tau = 2 \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_0^t = 2 \left(t^2 - \frac{t^2}{2} \right) = t^2 & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ \int_1^t 1 \cdot 2(t-\tau) d\tau = 2 \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_1^t = 2 \left(t - \frac{1}{2} \right) = 2t - 1 & \text{für } 1 < t \leq 2 \\ \int_{t-2}^1 1 \cdot 2(t-\tau) d\tau = 2 \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_{t-2}^1 = 2 \left(t - \frac{1}{2} - t(t-2) + \frac{(t-2)^2}{2} \right) & \text{für } 2 < t \leq 3 \\ = 2t - 1 - 2t^2 + 4t + t^2 - 4t + 4 = 3 + 2t - t^2 & \\ 0 & \text{für } 3 < t \end{cases}$$

6) Resultat zeichnen



Vorbesprechung / Tipps

1 a) -

b) Wie sind die Koeffizienten der Taylorreihe von $f(t)$ (a_n) bzw. der Fourierreihe von $g(t)$ (c_n) definiert? Nach a), welcher Zusammenhang gibt es zwischen beiden?

c) i) Lösung verifizieren (Vorlesung / Internet / vorherige Übungen)

ii) a) benutzen

d) -

2 a) Siehe Übungsstunde 8, Integral **IV**

b) Die zu berechnen Integral ist sehr ähnlich zu die, die in a) berechnet wurde.

↳ Substitution einführen damit die Integral gleich wird wie in a) ($x = -s(a-t)$)

Dann die verschiedenen Fälle unterscheiden:

- $a < t$
- $a = t$
- $a > t$

c) Die zu berechnen Integral als linear Kombination von die in b) berechnete Integral aufschreiben.

Dann die verschiedenen Fälle unterscheiden:

- $t < a$
- $t = a$
- ⋮

3 Möglichst viel Skizzieren, so könnt ihr eure Intuition für Faltungen entwickeln.

4 Wenn zu schwierig, später die Lösungen anschauen. Was aber gut zu verstehen wäre was mit dieser Aufgabe gemeint ist: Die (partielle) Fourierreihe ist die bestmögliche Approximation von f im Raum der trigonometrischen Polynome.

5 Keine Sorge wenn ihr nicht alles versteht. Jedoch, es wäre super den Text versuchen zu verstehen, um seine Verständnis von Reihenentwicklung zu entwickeln.